Lösungen zum 1.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :

   (a) Das System ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$, da

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30$$

   (b) Das System ist keine Basis des $\mathbb{R}^4$, da

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 8 & -6 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   (c) Das System ist eine Basis des $\mathbb{R}^4$, da

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ -5 & 8 & 7 & 2 \\ 4 & -5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -54$$

2. Aufgabe : Die mathematische Formulierung des Problems ist wie folgt :

$$\begin{aligned} z = 2\,P_1 + 3\,P_2 &\longrightarrow \text{max} && (1) \\ 2\,P_1 + 4\,P_2 &\leq 16 && (2) \\ 2\,P_1 + P_2 &\leq 10 && (3) \\ 4\,P_1 &\leq 20 && (4) \\ P_1, P_2 &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

3. Aufgabe :

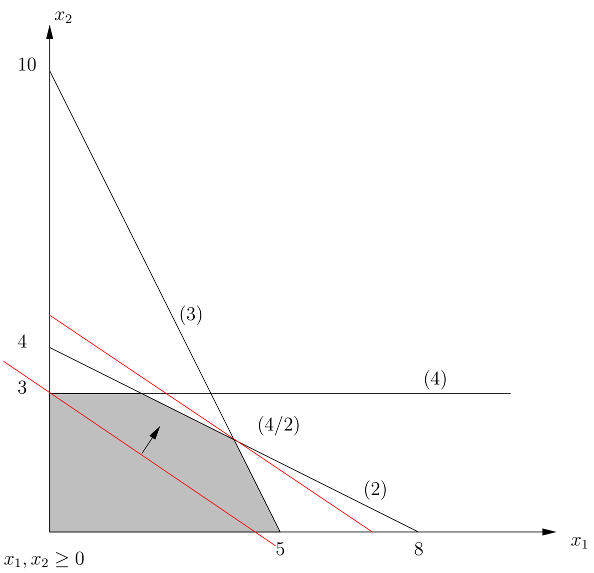

Abbildung 1: Lösung (a)

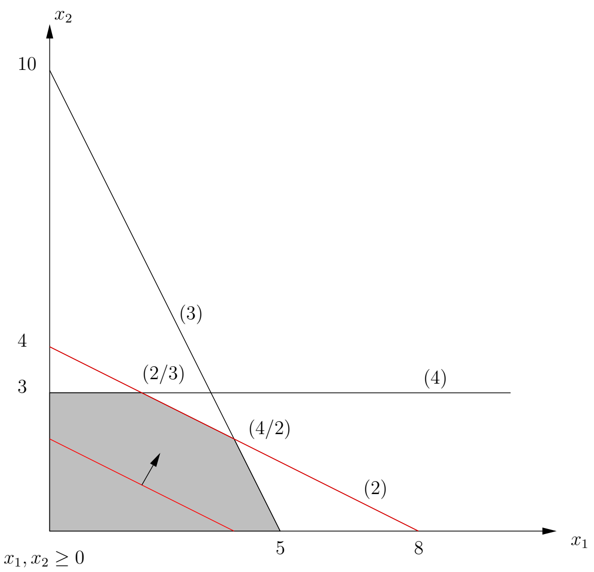

Abbildung 2: Lösung (b)

4. Aufgabe :
   Sei $\mathbb{I}$ eine beliebige Indexmenge und seien A_i, $i \in \mathbb{I}$, konvexe Mengen.
   Ist
   $$\bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i = \emptyset,$$
   dann gilt die Behauptung.
   Andernfalls, seien $a, b \in A_i \, \forall i \in \mathbb{I}$ und da A_i konvex,
   $$\begin{aligned} &\Longrightarrow && \forall i \in \mathbb{I} : \lambda\, a + (1 - \lambda)\, b \in A_i \text{ für } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ &\Longrightarrow && \lambda\, a + (1 - \lambda)\, b \in A \text{ für } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ &\Longrightarrow && A \text{ ist konvex} \end{aligned}$$