Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Dr. B. Rummler
Dr. V. John

Übungsaufgaben : Gewöhnliche Differentialgleichungen

Zu einer vollständig gelösten Aufgabe gehört die Probe.

0 Literatur

- H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, de Gruyter 1995, 2. Aufl.
- H. Goering, Elementare Methoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungsproblemen, Akademie–Verlag, Berlin 1978
- Günther, Beyer, Gottwald, Wünsch : Grundkurs Analysis, Teil 4, B.G. Teubner, Leipzig 1974
- H. Heuser : Gewöhnliche Differentialgleichungen, B.G. Teubner, Stuttgart 1991
- E. Kamke : Differentialgleichungen I, Geest & Portig, Leipzig 1962
- J. Serret, G. Scheffers : Lehrbuch der Differential– und Integralrechnung III, B.G. Teubner, Leipzig 1924
- H. Triebel : Höhere Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972
- W. Walter : Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer 1990, 4.Aufl.

1 Wiederholung und Einführung

1. Man berechne die Bogenlänge folgender Kurven :

$$\begin{aligned} x &= (t^2/2) - t + 2, y = (4/3)t^{3/2}, && 1 \le t \le 5, && \text{2 Punkte} \\ y &= (x^2/4) - \ln\sqrt{x}, && 1 \le x \le 2, && \text{2 Punkte} \\ y &= a\cosh(x/a), && a > 0,\ 0 \le x \le b. && \text{2 Punkte} \end{aligned}$$

2. Man berechne die Kurvenintegrale

$$\int\limits_{(C_k)} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$$

für die drei skizzierten Kurven C_k! 6 Punkte

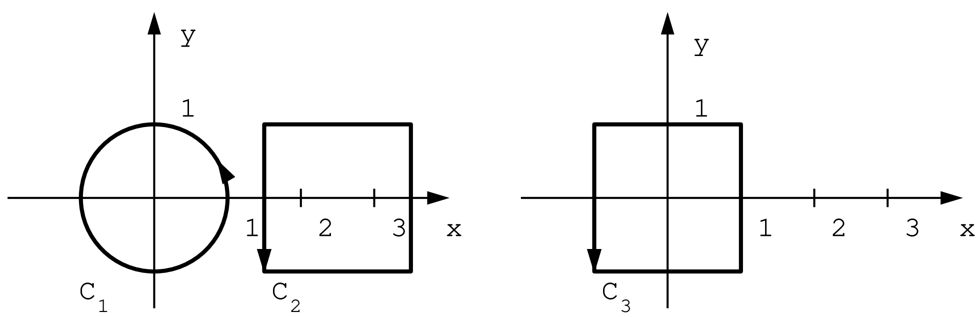

Abbildung 1: Kurven zu Aufgabe 2

3. Für welchen Wert λ besitzt das Vektorfeld

$$H = \left(\frac{x}{y}(x^2+y^2)^{\lambda/2}, -\frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda/2}\right)$$

ein Potential ? 2 Punkte

Man berechne für diesen Wert das Kurvenintegral

$$\int\limits_{(C)} \frac{x}{y}(x^2+y^2)^{\lambda/2}dx - \frac{x^2}{y^2}(x^2+y^2)^{\lambda/2}dy,$$

wobei die Kurve C die Parameterdarstellung

$$C = \{(x,y)\ :\ x = \exp(t)\cos(t), y = \exp(t)\sin(t)\}$$

besitzt und die Punkte $A = (\exp(\pi/4)/\sqrt{2}, \exp(\pi/4)/\sqrt{2})$ und $B = (0, \exp(\pi/2))$ miteinander verbindet. 3 Punkte

4. Man bestimme den Wert $I(\alpha)$ des räumlichen Kurvenintegrales

$$I(\alpha) = \int\limits_{(C)} (x - \alpha y)\ dx + y\ dy + z\ dz$$

längs der Kurve

$$C = \{(x,y,z)\ :\ x^2+z^2 = 1, x^2+y^2 = z^2, z \geq 0\},$$

die die Punkte $A = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ und $B = (0,1,1)$ miteinander verbindet. 4 Punkte

5. Man klassifiziere die folgenden Differentialgleichungen :

$$\begin{array}{lrcl}
\text{a)} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & = & 0 \\
\text{b)} & \dfrac{d^2 y}{dx^2} + \dfrac{d^6 y}{dx^6} & = & f(x) \\
\text{c)} & F(x, y(x), y'(x)) & = & 0 \\
\text{d)} & 2y(x)y'(x) & = & x(y'(x)^2 - 1).
\end{array}$$

2 Punkte

6. Man skizziere das Richtungsfeld der Dgl. $y'(x) = x^2 + y^2(x)$. 2 Punkte

7. Man berechne mit dem Euler–Vorwärtsverfahren eine Näherungslösung der Dgl. $y'(x) = x^2 + y^2(x)$ mit $y(0) = 1, x \in [0,1]$ und $h = 0.1$. 3 Punkte

2 Gleichungen 1. Ordnung

1. Man löse die folgenden Dgln. :

$$\begin{array}{lrcll}
\text{a)} & y'(x) + y^2(x) & = & 1 & \text{1 Punkt} \\
\text{b)} & y'(x) + y(x)\cos x & = & 0 & \text{1 Punkt} \\
\text{c)} & y'(x) & = & xy^7(x) & \text{1 Punkt} \\
\text{d)} & 2y(x)y'(x) & = & x^2 & \text{1 Punkt} \\
\text{e)} & y'(x) & = & \cos x - \sin x. & \text{1 Punkt}
\end{array}$$

2. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = (x-y)^2 + 1.$$

Hinweis : Geeignete Substitution. 3 Punkte

3. Man löse folgende Differentialgleichungen oder Anfangswertprobleme

$$\begin{array}{lrcll}
\text{a)} & (x+y)dx - (x-y)dy & = & 0\ , & \text{2 Punkte} \\
\text{b)} & (x^2+2xy-y^2)dx + (y^2+2xy-x^2)dy & = & 0, \qquad y(1) = -1\ , & \text{3 Punkte} \\
\text{c)} & xy' & = & y + \sqrt{y^2 - x^2}\ , & \text{2 Punkte} \\
\text{d)} & y^2 + x^2 y' & = & xyy', \quad x \neq 0\ . & \text{2 Punkte}
\end{array}$$

In Aufgabe d) reicht es, die Lösung implizit anzugeben.

4. Man beweise, daß die Integralkurven der Gleichung

$$(ax + by + c)dx + (ay - bx + d)dy = 0$$

logarithmische Spiralen sind. 4 Punkte

5. Man löse die Differentialgleichung

$$9yy' - 18xy + 4x^3 = 0.$$

Hinweis: Substituiere $y = z^2$. 4 Punkte

6. Man bestimme die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen

a)	$\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0\ ,$		2 Punkte
b)	$(x^2 + y)dx - xdy = 0\ ,$		3 Punkte
c)	$(x^2 + y^2)(xdy - ydx) = (a + x)x^4dx\ ,$		3 Punkte
d)	$(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)dx = -(y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)dy\ ,$		4 Punkte
e)	$xy^2dx + (x^2y - x)dy = 0\ ,$		3 Punkte
f)	$\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0\ .$		3 Punkte

7. Man finde eine notwendige und überprüfbare Bedingung dafür, daß für eine Differentialgleichung ein integrierender Faktor der Gestalt $\lambda(xy) = \lambda(z)$ existiert. 4 Punkte

8. Man löse die Anfangswertprobleme

a)	$xy' + 3y = x^2\ ,$	$x_0 = 0, y_0 = 0\ ,$	3 Punkte
b)	$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}\ ,$	$1y(0) = 1\ ,$	3 Punkte
c)	$y' + x^2y = x^2\ ,$	$y(2) = 1\ ,$	3 Punkte
d)	$y' = (1 + xy)/(1 - x^2)\ ,$	$\lvert x\rvert < 1\ ,\ y(0) = 4711.$	3 Punkte

9. Ein Motorboot bewegt sich bei ruhigem Wasser mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 10 km/h. Bei dieser Geschwindigkeit wird der Motor abgeschaltet und innerhalb von 20 Sekunden verringert sich die Geschwindigkeit des Bootes auf 6 km/h. Es wird angenommen, daß der Widerstand des Wassers das Boot proportional zu seiner Geschwindigkeit bremst. Man berechne die Geschwindigkeit des Bootes 2 Minuten nach dem Ausschalten des Motors ! Welchen Weg legt das Boot in der ersten Minute nach dem Ausschalten des Motors zurück ? 4 Punkte

10. Man bestimme die allgemeine Lösung von

a)	$xy' + y = y^2 \ln x\ ,$	3 Punkte
b)	$y^{n-1}(ay' + y) = x\ ,$	3 Punkte
c)	$xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0\ .$	3 Punkte

11. Man löse folgende Anfangswertprobleme:

a)	$y' = \dfrac{-x + 2}{x(1 - x)}y + \dfrac{1}{x^2(x - 1)}y^2,$	$y(2) = a, a \in \mathbb{R}, a > 0,,$	4 Punkte
b)	$xy' + 6y = 2x^2y^{1/2},$	$y(1) = a, a \in \mathbb{R}, a > 0.,$	4 Punkte

12. Man berechne das allgemeine Integral der Gleichung

$$(xy + x^2y^3)y' = 1\ .$$

Hinweis: Man betrachte die Umkehrfunktionen der Lösungen. 3 Punkte

13. Man bestimme die allgemeinen Integrale der Gleichungen

a)	$x^2y' = x^2y^2 + xy + 1\ ,$	4 Punkte
b)	$4y' + y^2 + 4x^{-2} = 0\ ,$	4 Punkte

die eine partikuläre Lösung der Form $y_1 = \frac{a}{x}$ besitzen.

14. Man finde die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen
    i) als Stammfunktion einer exakten Differentialgleichung,
    ii) durch Umformung und Zurückführung auf einen bekannten Typ einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1.Ordnung.

a) $y(1+xy)dx - xdy = 0$, 6 Punkte
b) $(x^2+y^2+2x)dx + 2ydy = 0$. 6 Punkte

15. Man löse die Gleichungen

a) $y' + y^2 = x^{-4}$ Ansatz : $y(x) = x^{-1} + x^{-2}w(t)$ mit $t = x$ oder $t = 1/x$, 5 Punkte
b) $xy' + 3y + y^2 = x^2$ Ansatz : $(y+3)(xz(t) - 1) = x^2$ mit $t = x^2$. 5 Punkte

16. Man bestimme die orthogonalen Trajektorien zu

a) $x^2 + y^2 = c$, 1 Punkt
b) $x^2 - y^2 = c$, 1 Punkt
c) $ax^2 + by = c$. 1 Punkt

17. Man beweise das Superpositionsprinzip für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n–ter Ordnung

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x) \ .$$ 3 Punkte

3 Existenz– und Eindeutigkeitssätze

1. Man überführe folgende Anfangswertprobleme in Differentialgleichungssysteme und löse diese nach Picard – Lindelöf (jeweils die ersten fünf Koeffizienten berechnen):

a) $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, 3 Punkte
b) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. 3 Punkte

2. Man berechne die Lösung des AWP

$$\begin{aligned} (1+x)y' + y &= (1+x)^{-1} \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

a) nach Picard–Lindelöf (ersten vier Koeffizienten), 2 Punkte
b) nach dem Euler Vorwärtsverfahren mit den Schrittweiten $h_1 = 0.2$ und $h_2 = 0.1$ (jeweils 10 Schritte oder bei Programm bis $x = 10$). 4 Punkte

3. Man untersuche die folgenden AWP auf das Erfülltsein der Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf (Bedingung $cL < 1$ nicht vergessen). Läßt sich der durch $a > 0, b > 0$ gegebene Quader gegebenenfalls vergrößern ? (Hierbei ist der Einfachheit halber die Bedingung $cL < 1$ nicht mehr zu beachten.)

a) $y_1'(x) = xy_1(x) + y_2(x)$, $x_0 = 0$, $a = b = 1$, 3 Punkte
$y_2'(x) = y_1(x) + xy_2(x)$, $(y_1)_0 = (y_2)_0 = 0$,
b) $y'(x) = \sqrt[4]{|y(x)|}$, $x_0 = 1, y_0 = 0$, $a = b = 1$, 2 Punkte
c) $y'(x) = x^2 + y^2(x)$, $x_0 = 0, y_0 = 1$, $a = b = 1$, 3 Punkte
d) $y'(x) = \sqrt[4]{|x|}y^3(x)$, $x_0 = 0, y_0 = 1$, $a = b = 1$. 3 Punkte

4. Man beweise oder widerlege folgende Behauptungen :

a) Jede stetige Funktion, die auf einer beschränkten Menge B definiert ist, genügt einer Lipschitzbedingung. 2 Punkte

b) Genügt eine Funktion über einer offenen, beschränkten Menge G einer Lipschitzbedingung, so ist diese Funktion stetig über G. 2 Punkte

c) Genügt eine Funktion über einer offenen, beschränkten Menge G einer Lipschitzbedingung, so ist diese Funktion über G stetig differenzierbar. 2 Punkte

d) Ist eine Funktion über einem abgeschlossenen, zusammenhängenden Intervall $B \subset \mathbb{R}$ stetig differenzierbar bis zum Rand, so genügt sie über B einer Lipschitzbedingung. 2 Punkte

5. Man bestimme die Lösung des folgenden Systems mit einem Potenzreihenansatz (bis zum sechsten Koeffizienten):

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} y \,, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

3 Punkte

6. Man löse die folgenden AWP mit Potenzreihenansätzen (jeweils bis zum fünften Koeffizienten).

a)	$y'' + 3y' + 2y = 0 \,, \quad y_1(0) = 1 \,, y_1'(0) = -1 \,; \quad y_2(0) = 1 \,, y_2'(0) = -2 \,;$	4 Punkte
b)	$y'' + 6y' + 9y = 0 \,, \quad y_1(0) = 1 \,, y_1'(0) = -3 \,; \quad y_2(0) = 0 \,, y_2'(0) = 1 \,;$	4 Punkte
c)	$y'' + 4y = 0 \,, \quad y_1(0) = 0 \,, y_1'(0) = 2 \,; \quad y_2(0) = 1 \,, y_2'(0) = 0 \,;$	4 Punkte
d)	$y'' + 2y' + 2y = 0 \,, \quad y_1(0) = 0 \,, y_1'(0) = 1 \,; \quad y_2(0) = 1 \,, y_2'(0) = -1 \,.$	4 Punkte

4 Parameterabhängige Differentialgleichungen

1. Man ermittle die maximale Lösung des AWP

$$y' = \frac{2y}{\sin 2x} \,, \; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

3 Punkte

2. Das AWP

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} \,, \; y(0) = 0$$

hat im Intervall $x \in [-0.25, 0.25]$ die Lösung

$$y = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2(2\nu+1)} x^{2\nu+1}.$$

Man ermittle die zugehörige maximale Lösung. 3 Punkte

3. Man entwickle die Lösung des AWP

$$(x + \lambda)y' = \sqrt{1 - y^2} \arcsin y \,, \; y(0) = \sin \lambda$$

in eine Potenzreihe bezüglich des Parameters λ mit dem Entwicklungspunkt $\lambda_0 = 0$.
Hinweis: Man verwende den Ansatz $y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\lambda^n$. Durch Differentiation dieses Ansatzes und der Anfangsbedingungen nach λ, Nutzung der Differentialgleichung sowie das Setzen von $\lambda = 0$ erhält man AWPe für die Koeffizienten $y_n(x)$. Es reicht, $y_0(x)$ und $y_1(x)$ anzugeben. 6 Punkte

4. Man entwickle die Lösung des AWP

$$y' = \lambda y^2 + 1 \,, \; y(0) = y^0$$

in eine Potenzreihe der Form

$$y(x, y^0, \lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} y_\nu(x, y^0)(\lambda - 1)^\nu.$$

Es reicht, die Koeffizienten für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ anzugeben.
Hinweis : Vorgehen wie in Aufgabe 3 oder Ansatz in Differentialgleichung einsetzen. 6 Punkte

5 Gleichungen 2. Ordnung und Systeme

1. Man bestimme die allgemeinen Integrale der Gleichungen

a)	$y'' + 2y' + 5y = 0$,		2 Punkte
b)	$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$,		2 Punkte
c)	$y'' + y = 0$,		2 Punkte
d)	$y'' - 6y' + 9y = 0$,		2 Punkte
e)	$x^2 y'' + xy' + y = 0$,	Subst. $x = e^t$,	3 Punkte
f)	$x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$,	Subst. $x = e^t$.	3 Punkte

2. Man finde die allgemeinen Lösungen von

a)	$y'' + 3y' + 2y = 1/(e^{-x} + e^{-2x})$,	4 Punkte
b)	$y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}/(1+x)$,	3 Punkte
c)	$y'' + 4y = e^{2x}\sin(x) + \cos(2x)$,	4 Punkte
d)	$y'' + 2y' + 2y = x\sin x + e^x \cos x$,	4 Punkte
e)	$y'' + 2y' + 10y = 20x^3 + 17x^2 + 14x - 9$,	3 Punkte
f)	$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$,	3 Punkte
g)	$y'' - 2y' - 3y = 1 + 5e^{4x}$.	3 Punkte

Hinweis : In den Aufgaben c) bis g) führen Störgliedansätze zu einer Lösung der inhomogenen Gleichung (siehe Literatur).

3. Die Funktionen x^3 und x^4 seien linear unabhängige Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Man gebe eine Gleichung an, für die dies zutrifft ! 2 Punkte

4. Gesucht ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y' &= y + z + u \\ z' &= z + u \\ u' &= u \, . \end{aligned}$$

3 Punkte

5. Man löse das AWP

$$\begin{aligned} y' + 3y + z &= 0 \, , \qquad y(0) = z(0) = 1 \\ z' - y + z &= 0 \, . \end{aligned}$$

3 Punkte

6. Man finde mit Hilfe der Methode der Eigen– und Hauptvektoren die allgemeine Lösung von

$$\begin{aligned} u' &= 7u + z \\ z' &= -4u + 3z. \end{aligned}$$

4 Punkte

7. Gesucht ist die allgemeine Lösung des DGL–Systems

$$\begin{aligned} y' &= x + y + z + u \\ z' &= x + z + u \\ u' &= x + u \, . \end{aligned}$$

Hinweis : Zur Lösung des inhomogenen Systems verwende man einen geeigneten Ansatz. 4 Punkte

8. Man löse das DGL–System

$$\begin{aligned} y' + 3y + z &= xe^{-2x} \, , \; y(0) = z(0) = 1 \\ z' - y + z &= x^2 \, . \end{aligned}$$

4 Punkte

9. Man löse

   a) mit Hilfe der in der Vorlesung dargelegten Methode der Hauptvektoren

b) mit Hilfe von Matrizenfunktionen

die folgenden AWP eines Systems mit konstanten Koeffizienten

$$y' = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 2 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} e^x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 9 Punkte

und

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} y \; , \; y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$ 7 Punkte

Hinweis : Zur Lösung des inhomogenen Systems verwende man einen geeigneten Ansatz.

10. Man zeige : Die homogene lineare Dgl. n-ter Ordnung kann vermittels des Ansatzes $g(x)y_0(x)$, wobei $y_0(x)$ Lösung der homogenen Dgl. ist, um eine Ordnung erniedrigt werden.
Hinweis: Wähle $g(x)$ so, daß $g(x)y_0(x)$ eine andere Lösung des homogenen Systems ist. 5 Punkte

11. Man löse mit der Vorgehensweise von Aufgabe 10 die Dgl.

$$y'' + (1 + x^2)y' + x^2 y = 0 \; .$$

Hinweis : $y_0 = exp(-x)$; es reicht, die Lösung in Integralform stehen anzugeben. 3 Punkte

12. Man zeige, daß die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(\nu)}(x) = 0 \; , \; \nu = 0, 1, \ldots, n-2$$

im Ansatz der Variation der Konstanten für die lineare Dgl. n–ter Ordnung gerade die Äquivalenz der Lösungen der inhomogenen Dgl. n–ter Ordnung mit der Lösung des der linearen Dgl. n–ter Ordnung entsprechenden Systems von n linearen Dgl. 1. Ordnung sichern. 4 Punkte

6 Randwertprobleme 2.Ordnung

1. Man konstruiere die Greensche Funktion zum Operator $Lu = u'' - u$ mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$. 4 Punkte