FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 16.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Numerik Partieller Differentialgleichungen – eine elementare Einführung

Serie 09

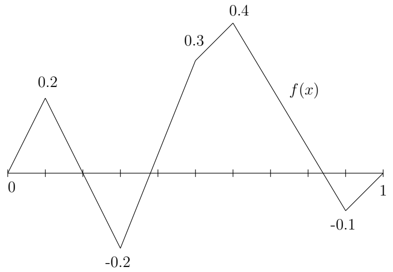
abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 24.06.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man zeige, dass
$$a(u,v) = \int_0^\infty e^{-x} u(x) g(x)\ dx$$
ein (reelles) Skalarprodukt in $L^2(0,\infty)$ definiert.
Hinweis: Eine Bilinearform $a(\cdot,\cdot)\ :\ V \times V \to \mathbb{R}$ wird (reelles) Skalarprodukt genannt, wenn sie symmetrisch und positiv definit ist:
   i) $a(\alpha u+\beta v, w) = \alpha a(u,v)+\beta a(w,v),\ a(u,\alpha v+\beta w) = \alpha a(u,v)+\beta a(u,w),\ \forall u,v,w \in V, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$,
   ii) $a(u,v) = a(v,u)\ \forall u,v \in V$,
   iii) $a(u,u) \geq 0\ \forall u \in V$ und $a(u,u) = 0 \iff u = 0$.

4 Punkte

2. (a) Sei V ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ und der induzierten Norm $\|v\|_V = a(v,v)^{1/2}$. Man zeige, dass für alle $v,w \in V$ gilt
$$\|v-w\|_V^2 + \|v+w\|_V^2 = 2\|v\|_V^2 + 2\|w\|_V^2.$$
   (b) Man berechne die schwache Ableitung der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$



4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !