FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 06.05.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Numerik Partieller Differentialgleichungen – eine elementare Einführung

Serie 03

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 13.05.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Betrachtet wird der Differentialoperator $Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(x\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ und die Finite–Differenzen–Approximation

$$\left(L_h u_h\right)_i = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - a_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right).$$

Man zeige, dass die beiden Wahlen $a_i = \frac{k_i+k_{i-1}}{2}$ und $a_i = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$ die Bedingungen für die Konsistenzordnung 2,

$$\frac{a_{i+1}-a_i}{h} = k'\left(x_i\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right), \qquad \frac{a_{i+1}+a_i}{2} = k\left(x_i\right) + \mathcal{O}\left(h^2\right),$$

die in der Vorlesung hergeleitet wurden, erfüllen. **4 Punkte**

2. (a) Man berechne den Konsistenzfehler der folgenden Finiten–Differenzen–Approximation

$$u''\left(x\right) \sim \frac{1}{12\,h^2}\Big(-u\left(x+2\,h\right)+16\,u\left(x+h\right)-30\,u\left(x\right)+16\,u\left(x-h\right)-u\left(x-2\,h\right)\Big).$$

(b) Man zeige, dass das zentrale Differenzenschema von 2. Ordnung konsistent ist, falls $u \in C^4([0,1])$.

4 Punkte

Programmieraufgabe zum 20.05.2009

Das Programm ist bis 20.05.2009 per Email an den Übungsgruppenleiter zu senden.

1. Man schreibe ein MATLAB–Programm, welches die Lösung des 2–Punkt–Randwertproblems

$$-u'' + u' + u = 1 \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

mit Hilfe des zentralen Differenzenschemas approximiert. Man führe die Rechnungen auf Gittern mit $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ Gitterpunkten durch und berechne jeweils den Fehler zur Lösung des stetigen Problems in der diskreten Maximumsnorm. Aus diesen Fehlern bestimme man die numerische Konvergenzordnung k.

Eine Formel für k erhält man mit dem Ansatz

$$\|u - u_h\|_{\infty,d} = ch^k,$$

indem man diesen Ansatz etwa für die Gitterweiten h und $2h$ (mit gleicher Konstante c) betrachtet und diese Beziehungen nach k umstellt. **8 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !