Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John, Dr. A. Linke
john@wias-berlin.de, linke@wias-berlin.de

Berlin, 24.01.2011

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Simulation inkompressibler Strömungen (Numerik IVb)

Serie 03

abzugeben vor der Vorlesung am Montag, dem 07.02.2011

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. *Stabilität der Finite–Elemente–Lösung der Stokes–Gleichungen.* Seien die Stokes–Gleichungen mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen mit einem Paar inf–sup stabiler Finiter–Elemente diskretisiert. Man zeige

$$\|\nabla \mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla \mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \|p^h\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{2}{\beta_{\mathrm{fe}}}\|\nabla \mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

   vergleiche Lemma 4.25.
   Hinweis: Nutzung der diskreten inf–sup Bedingung. **4 Punkte**

2. *Stokes–Gleichungen mit Viskosität.* Gegeben seien die Stokes–Gleichungen mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

   Diese Gleichungen seien mit inf–sup stabilen Finite–Elementen diskretisiert. Man führe eine Fehlerabschätzung für den Fehler $\|\nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^h\|_{L^2(\Omega)}$ durch und untersuche dabei insbesondere die Abhängigkeit der Abschätzung von $\nu > 0$.
   4 Punkte

3. *Kontinuierliche Resultate aus der Vektoranalysis.* Man weise die drei folgenden Resultate für Funktionen $\varphi \in C^2(\Omega)$ und $\mathbf{w} \in C^2(\Omega)$ in drei Raumdimensionen nach:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla\varphi &= 0, \\ \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{w} &= 0, \\ -\Delta\mathbf{w} &= \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} - \nabla\nabla \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

   Was passiert mit der letzten Relation, wenn man statt einer dreidimensionalen Funktion $\mathbf{w}$ eine zweidimensionale Funktion $\mathbf{w} = (u, v, 0)^T$ in die Gleichung einsetzt ? **4 Punkte**

4. *Diskrete Vektoranalysis für das MAC–Schema.* Man weise die analogen Resultate für die in der Vorlesung eingeführten diskreten Differentialoperatoren des zweidimensionalen MAC–Schemas nach. Für das diskrete Analogon der Relation

$$-\Delta \mathbf{w} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{w} - \nabla \nabla \cdot \mathbf{w}$$

rechne man die rechte Seite der Relation im Diskreten nach, und erkläre, warum das Ergebnis eine Diskretisierung eines Vektor–Laplace–Operators darstellt. Es genügt, die Relationen für Freiheitsgrade im Innern des Gebiets zu zeigen. **4 Punkte**