Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de
Dr. A. Linke
linke@wias-berlin.de

Berlin, 25.10.2010

Seminaraufgaben zur Vorlesung

Simulation inkompressibler Strömungen (Numerik IVb)

Die Seminaraufgaben beinhalten im Wesentlichen Programmieraufgaben. Jeder Studierende hat eine Seminaraufgabe zu bearbeiten. Sie können allein, zu zweit oder zu dritt bearbeitet werden. Am Ende des Semesters sind die Ergebnisse in einem kurzen Bericht darzulegen und in einem Vortrag vorzustellen.

1. **Finite–Elemente–Programm für die Stokes–Gleichungen.** Man schreibe ein Programm, zum Beispiel in MATLAB, welches Lösungen der Stokes–Gleichungen auf dem Einheitsquadrat numerisch approximiert.

   Als Finite–Elemente sollen

   - Q_2/Q_1 oder P_2/P_1,
   - Q_1/Q_1 oder P_1/P_1, mit Stabilisierung (bei Bearbeitung von zwei Studierenden)

   verwendet werden. Dabei sollen äquidistante Gitter der Gitterweiten

   $$h_x = h_y = h = 2^{-n} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

   genutzt werden. Die Matrizen sind im `sparse`–Format zu speichern.

   An Hand vorgegebener Lösungen sind die Konvergenzeigenschaften der verwendeten Diskretisierung zu untersuchen.

2. **Finite–Elemente–Programm für die Navier–Stokes–Gleichungen.** Falls drei Studierende an der Aufgabe 1 arbeiten wollen, dann sollte das Programm noch auf die Navier–Stokes–Gleichungen erweitert werden. Auch für diese Gleichungen ist das Konvergenzverhalten an Hand vorgegebener Lösungen zu studieren. Darüber hinaus kann das sogenannte Driven–Cavity–Problem für verschiedene Reynolds–Zahlen gerechnet und die Lösungen visualisiert werden, siehe [ECG05] als Referenz.

3. **MAC Finite–Volumen–Verfahren für die Stokes–Gleichungen.** Man programmiere die klassische MAC–Diskretisierung für die Stokes–Gleichungen

   $$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } (0,1)^2, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } (0,1)^2, \end{aligned}$$

   [Pat80, Nic92], mit (stetigen) Dirichlet–Randdaten für die Geschwindigkeit und einer gegebenen (stetigen) rechten Seite $\mathbf{f}$. Die Dirichlet–Randdaten und die rechte Seite sollen durch Punktauswertungen an den entsprechenden Gitterknoten gesetzt werden.

   An Hand vorgegebener Lösungen sind die Konvergenzeigenschaften der verwendeten Diskretisierung zu untersuchen.

4. **Skalare Konvektions–Diffusions–Gleichung mit Finite–Volumen–Verfahren.** Man programmiere die Finite–Volumen–Methode auf Delaunay–Gittern für elliptische Konvektions-Diffusions-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = s, \qquad \mathbf{q} = -D\nabla c + c\mathbf{u} \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2,$$

mit (stetigen) Dirichlet–Randdaten und einer gegebenen (stetigen) rechten Seite s. Für die Diskretisierung des numerischen Flusses $\mathbf{q}$ verwende man die drei in der Vorlesung untersuchten Verfahren

- zentrale Differenzen,
- simple upwinding,
- exponential fitting,

und vergleiche deren experimentelle Konvergenzordnung (diskrete H^1–Norm, diskrete L^2–Norm, diskrete L^∞–Norm) auf unstrukturierten und strukturierten Delaunay–Dreiecksnetzen.

Das Testproblem sei auf $\Omega = (0,1)^2$ mit homogenen Dirichlet–Randdaten gestellt. Der Diffusionskoeffizent sei gegeben durch $D \in \{1, 10^{-5}\}$. Das Geschwindigkeitsfeld für die Konvektion sei

$$\mathbf{u} = (2(x-1)^2x^2(y-1)y(2y-1), -2(y-1)^2y^2(x-1)x(2x-1))^T.$$

Man bestimme den Quellterm s so, dass

$$c = x^2(x-1)y(y-1)$$

die partielle Differentialgleichung erfüllt. Die Dirichlet–Randdaten und die rechte Seite sollen durch Punktauswertungen an den entsprechenden Gitterknoten gesetzt werden.

5. **Finite–Element–Programm mit alternativen Formen des konvektiven Terms der Navier–Stokes–Gleichungen.** Im Programm *MooNMD* sind neben der konvektiven Form auch die schiefsymmetrische Form und die Rotationsform des konvektiven Terms für die 2D stationären Navier–Stokes–Gleichungen inplementiert. Diese Implementationen sind jedoch bisher nur wenig getestet und untersucht.

   Man überprüfe diese Implementationen, studiere sie numerisch und vergleiche die Ergebnisse (Genauigkeit, Rechenzeit, Speicher) zur konvektiven Form des konvektiven Terms an Hand einiger bereits in *MooNMD* implementierter Beispiele. Darüber hinaus erweitere man die Implementationen auf die 3D stationären Navier–Stokes–Gleichungen und teste diese.

6. **Eigene Ideen sind willkommen.**

Literatur

[ECG05] E. Erturk, T.C. Corke, and C. Gökçöl. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 48:747 – 774, 2005.

[Nic92] R.A. Nicolaides. Analysis and convergence of the MAC scheme. I. The linear problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(6):1579 – 1591, 1992.

[Pat80] S.V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow.* Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences. Washington - New York - London: Hemisphere Publishing Corporation; New York etc.: McGraw-Hill Book Company, 1980.