Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John
john@wias-berlin.de

Berlin, 02.06.2010

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Numerik konvektions–dominanter Probleme

Serie 04

abzugeben vor der Vorlesung am Montag, dem 14.06.2010

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. In $L^2(0,1)$ betrachte man die Bilinearform

$$a \ : \ L^2(0,1) \times L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \int_0^1 xu(x)v(x)\ dx,$$

das lineare Funktional

$$f \ : \ L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(v) = \int_0^1 v(x)\ dx$$

und das Funktional

$$J \ : \ L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v).$$

a) Man zeige, dass a und f stetig sind.

b) Man weise nach, dass das Variationsproblem

$$J(v) \to \min$$

keine Lösung in $L^2(0,1)$ besitzt.

c) Welche der Voraussetzungen des Satzes von Lax–Milgram ist nicht erfüllt? Zur Begründung gebe man ein Gegenbeispiel an!

4 Punkte

2. Betrachte das Referenzdreieck $\widehat{K}$ mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Der Polynomraum zweiten Grades wird von

$$1,\ \widehat{x},\ \widehat{y},\ \widehat{xy},\ \widehat{x}^2,\ \widehat{y}^2$$

aufgespannt. Als Funktionale Φ_i, $i = 1,\ldots,6$, werden die Funktionswerte in den Eckpunkten und den Seitenmittelpunkten genommen. Man berechne die lokale Basis zu diesen Funktionalen, das heißt, die Basis $\phi_j(\hat{\mathbf{x}})$, $j = 1,\ldots,6$, für welche $\Phi_i(\phi_j) = \delta_{ij}$ gilt. **4 Punkte**

3. Betrachte das Referenzviereck $\widehat{K} = [-1, 1]^2$ und den von den Funktionen

$$1,\, \widehat{x},\, \widehat{y},\, \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2$$

aufgespannten Raum. Als Funktionale werden die Integralmittelwerte über die Kanten von $\widehat{K}$ genommen

$$\Phi(v) = \frac{1}{\mathrm{meas}(E)} \int_E v(s)\; ds.$$

Man berechne die lokale Basis zu diesen Funktionalen. **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !