Kapitel 4

Schwache Lösungstheorie

Bemerkung 4.1 Motivation. Dieses Kapitel stellt eine Erweiterung des Lösungsbegriffes von partiellen Differentialgleichungen vor – die schwache Lösung. Diese Erweiterung ist aus folgenden Gründen notwendig:

- Man kann im allgemeinen nicht erwarten, dass eine partielle Differentialgleichung eine klassische Lösung besitzt. Dazu müssen die Parameterfunktionen hinreichend oft differenzierbar sein und in höheren Dimensionen muss auch das Gebiet einige Forderungen erfüllen. Zum Beispiel darf es keine Ecke besitzen. Diese Forderungen sind aber in der Natur oder in Anwendungen oft nicht erfüllt. Trotzdem laufen die durch die partielle Differentialgleichung beschriebenen Prozesse ab und es gibt offensichtlich eine Lösung. Nur wird diese bestimmte (Differenzierbarkeits–)Eigenschaften der klassischen Lösung nicht besitzen und man benötigt einen erweiterten Lösungsbegriff.
- Die im Kapitel 5 vorgestellte Finite–Element–Methode beruht auf der schwachen Formulierung der zu Grunde liegenden Gleichung.

Die grundlegende Idee bei der Abschwächung des Lösungsbegriffes besteht in der Formel der partiellen Integration. Betrachte das Zwei–Punkt–Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Multiplikation mit einer gewissen Funktion $v(x)$, mit $v(0) = v(1) = 0$, der so genannten Testfunktion, Integration über $(0,1)$ und anschließende partielle Integration führen auf

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u''(x)v(x)\ dx &= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx. \end{aligned}$$

Um dieser Gleichung einen Sinn zu geben, benötigt man nur noch, dass die Produkte $u'(x)v'(x)$ und $f(x)v(x)$ integrierbar sind. Es wird nicht einmal die Existenz der zweiten Ableitung von $u(x)$ verlangt. Natürlich muss geklärt werden, welche Eigenschaften geeignete Testfunktionen besitzen müssen. Der schwache Lösungsbegriff wird verlangen, dass die obige Integralgleichung für alle geeigneten Testfunktionen erfüllt ist. □

Bemerkung 4.2 Herleitung der variationellen oder schwachen Formulierung. Betrachte das Zwei–Punkt–Randwertproblem

$$-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{4.1}$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit einer geeigneten Funktion $v(x)$, mit $v(0) = v(1) = 0$, Integration der resultieren Gleichung über $(0,1)$ und anschließende partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(- \varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)\Big) v(x)\ dx \\
&= \quad -\varepsilon u'(1)v(1) + \varepsilon u'(0)v(0) \\
&\qquad + \int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \\
&= \quad \int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \\
&= \quad \int_0^1 f(x)v(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Man hat also von der höchsten Ableitung von $u(x)$ eine Ableitung auf die Funktion $v(x)$ übertragen. Damit die obige Schreibweise Sinn macht, müssen die Funktionen natürlich so beschaffen sein, dass die Integrale wohldefiniert sind. $\square$


Abbildung 4.1: Links: Henri Lebesgue (1875 – 1941), rechts: Sergej Lwowitsch Sobolev (1908 – 1989).

Bemerkung 4.3 Funktionenräume. Es werden Standardbezeichnungen für die Lebesgue–Räume $L^p(a,b)$, $p \in [1,\infty]$, sowie für Sobolev–Räume $W^{k,p}(a,b)$, $p \in [1,\infty]$, $k \in \mathbb{R}$ verwendet. Sobolev–Räume mit $p = 2$ werden auch mit $H^k(a,b)$ bezeichnet.

Wichtig ist der Raum $H_0^1(a,b)$, welcher durch

$$H_0^1(a,b) := \left\{ v \in H^1(a,b)\ :\ v(a) = v(b) = 0 \right\}.$$

definiert ist. In einer Dimension macht die obige Definition Sinn, denn jede Äquivalenzklasse in $H^1(a,b)$ besitzt einen stetigen Repräsentanten. In höheren Dimensionen muss man die Randwerte noch geeignet erklären (Spur).

Auf $H_0^1(a,b)$ werden durch $|\cdot|_{1,2}$ eine Norm und durch

$$(u,v)_{1,2} := \int_a^b u'(x)v'(x)\ dx, \quad |u|_{1,2} := (u,u)_{1,2}^{1/2},$$

ein Skalarprodukt und eine Norm definiert. Damit ist $H_0^1(a,b)$ ein separabler Hilbert–Raum.

Die Poincaré–Friedrichs–Ungleichung

$$\|u\|_2 \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} |u|_{1,2} =: C_{PF} |u|_{1,2} \quad \text{für alle } u \in H_0^1(a,b)$$

zeigt die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{1,2}$ und $|\cdot|_{1,2}$ auf $H_0^1(a,b)$. □

Abbildung 4.2: David Hilbert (1862 – 1943).

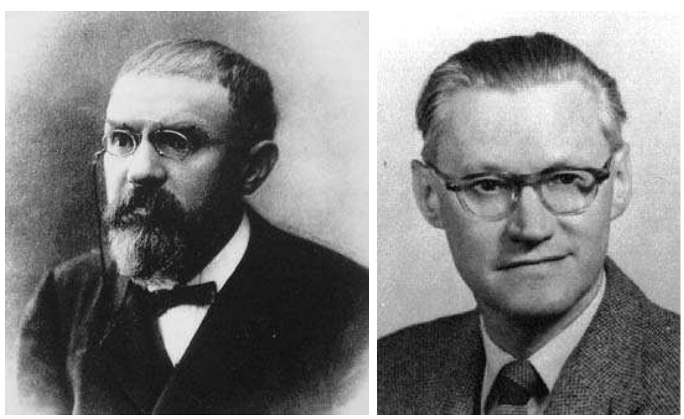


Abbildung 4.3: Links: Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), rechts: Kurt Otto Friedrichs (1901 – 1982).

Definition 4.4 Variationelle oder schwache Formulierung. Seien $b, c \in L^\infty(0,1)$ und $f \in H^{-1}(0,1)$. Die schwache Formulierung des Zwei–Punkt–Randwertproblems (4.1) lautet: Finde $u \in H_0^1(0,1)$, so dass für alle $v \in H_0^1(0,1)$

$$\int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\, dx = \int_0^1 f(x)v(x)\, dx \qquad (4.2)$$

gilt. Die Lösung nennt man schwache oder verallgemeinerte Lösung. Der Raum in dem die Lösung gesucht wird heißt Lösungs– oder Ansatzraum. Die Funktionen $v(x)$ heißen Testfunktionen und der Raum aus dem sie stammen Testraum. □

Bemerkung 4.5 Zur schwachen Formulierung.

- Der $H^{-1}(\Omega)$ ist der duale Raum von $H_0^1(\Omega)$ (und nicht von $H^1(\Omega)$).
- Die Voraussetzungen sind so, dass alle Terme wohldefiniert sind.
- Im Gegensatz zur klassischen Lösung muss die schwache Lösung nur noch einmal differenzierbar sein, und das auch nur schwach.
- Jede klassische Lösung ist auch schwache Lösung. Die Umkehrung gilt jedoch nur bei hinreichend glatten Koeffizienten und rechter Seite.

□

Beispiel 4.6 Schwache Lösung, welche keine klassische Lösung ist. Betrachte ein Zwei–Punkt–Randwertproblem der Form (4.1) in $(-1,1)$ mit $\varepsilon = 1$, $b(x) = c(x) = 0$ für alle $x \in (-1,1)$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0, \\ -2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

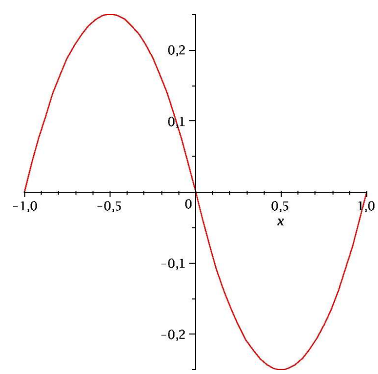
und $u(-1) = u(1) = 0$. Die rechte Seite ist nicht stetig, deshalb kann dieses Problem keine klassische Lösung besitzen.

Dieses Problem kann als Modell der Wärmeleitung in einem eindimensionalen Stab der Länge Zwei aufgefasst werden. In $[-1,0)$ wird der Stab erhitzt, in $(0,1]$ abgekühlt. Was im Punkt $x = 0$ passiert ist für die schwache Formulierung unwichtig. Gesucht ist die Temperatur $u(x)$. An den Stabenden ist die Temperatur jeweils Null. Die Wärmeleitung findet nur durch Diffusion (Molekularbewegung) statt.

Das Problem besitzt die schwache Lösung

$$u(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{für } x < 0, \\ x^2 - x & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

sie Abbildung 4.4.



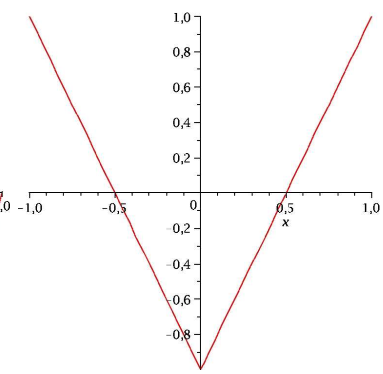


Abbildung 4.4: Beispiel 4.6: schwache Lösung und ihre Ableitung.

Die erste Ableitung von $u(x)$ ist stetig

$$u'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{für } x < 0, \\ 2x - 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Die variationelle Formulierung: Finde $u \in H_0^1(-1,1)$, so dass

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\ dx$$

für alle $v \in H_0^1(-1,1)$ ist also wohldefiniert. Es gilt für alle $v \in H_0^1(-1,1)$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\ dx &= \int_{-1}^{0} u'(x)v'(x)\ dx + \int_{0}^{1} u'(x)v'(x)\ dx \\
&= \int_{-1}^{0} -u''(x)v(x)\ dx + \lim_{x\to 0-} u'(x)v(x) - u'(-1)v(-1) \\
&\quad + \int_{0}^{1} -u''(x)v(x)\ dx + u'(1)v(1) - \lim_{x\to 0+} u'(x)v(x) \\
&= \int_{-1}^{0} 2v(x)\ dx + \int_{0}^{1} (-2)v(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Die Terme an den Randpunkten verschwinden, weil $v(x)$ dort verschwindet. Die Terme im Punkt $x = 0$ sind gleich, weil $u'(x)$ und $v(x)$ stetig sind. □

Bemerkung 4.7 Andere Randbedingungen.

- Betrachte zunächst inhomogene Dirichlet–Bedingungen

  $$u(0) = a, \quad u(1) = b.$$

  Dann sieht die schwache Formulierung genauso aus wie (4.2), auch der Testraum bleibt $H_0^1(0,1)$, aber der Ansatzraum ändert sich zu

  $$\begin{aligned}
  V_a &:= \left\{v \in H^1(0,1)\ :\ v = g + w,\ w \in H_0^1(0,1)\right\} \\
  &= \left\{v \in H^1(0,1)\ :\ v(0) = a,\ v(1) = b\right\},
  \end{aligned}$$

  wobei $g \in H^1(0,1)$ eine beliebige, aber fixierte Funktion mit $g(0) = a, g(1) = b$ ist. Dirichlet–Bedingungen nennt man auch wesentliche Randbedingungen, da sie entscheidend in die Definition des Ansatzraumes eingehen.
- Dagegen können Neumann–Randbedingungen in natürlicher Weise eingearbeitet werden, weshalb sie auch natürliche Randbedingungen genannt werden. Seien $\varepsilon u'(0) = \alpha$, $\varepsilon u'(1) = \beta$, dann sucht man ein $u \in H^1(0,1)$, so dass

  $$\begin{aligned}
  &\int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \\
  &\quad = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx - \beta v(1) + \alpha v(0)
  \end{aligned}$$

  für alle $v \in H^1(0,1)$ erfüllt ist. Die Randterme fallen bei der partiellen Integration der klassischen Formulierung nicht weg.

□

Definition 4.8 Bilinearform. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach–Raum. Eine Abbildung $a : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt

1. bilinear, falls $a(\cdot,\cdot)$ in jedem Argument linear ist,
2. symmetrisch, falls $a(u,v) = a(v,u)$ für alle $u, v \in V$ gilt,
3. positiv, falls $a(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$ gilt,
4. stark positiv oder koerzitiv oder V–elliptisch oder positiv definit, falls es ein $\mu > 0$ gibt, so dass $a(v,v) \geq \mu \|v\|^2$ für alle $v \in V$ gilt.
5. Eine Bilinearform heißt beschränkt, falls es ein $\beta > 0$ gibt, so dass

   $$|a(u,v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$$

   für alle $u, v \in V$ gilt.

Abbildung 4.5: Stefan Banach (1892 – 1945).

□

Beispiel 4.9 Eigenschaften der Bilinearform des betrachteten Randwertproblems. Betrachte das Zwei–Punkt–Randwertproblem mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen.

- Dann ist
$$a(u,v) := \int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\,dx \qquad (4.3)$$
eine Bilinearform auf dem Raum $V = H_0^1(0,1)$. Das folgt direkt aus der Linearität der Integration und der Linearität der Differentiation.
- Ist $b(x) = 0$ für alle $x \in (0,1)$, dann ist $a(u,v)$ symmetrisch.
- Seien $b \in C^1([0,1])$ und $c \in C([0,1])$. Es ist
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 b(x)v'(x)v(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (b(x)v(x))'v(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(x)v(x)v(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 b(x)v'(x)v(x)\,dx \\ \Longrightarrow \quad \int_0^1 b(x)v'(x)v(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(x)v(x)v(x)\,dx. \end{aligned}$$
Einsetzen in (4.3) mit $u(x) = v(x)$ ergibt
$$a(v,v) = \int_0^1 \left(\varepsilon\,(v'(x))^2 + \left(-\frac{b'(x)}{2} + c(x)\right)(v(x))^2\right)\,dx$$
Falls $-b'(x)/2 + c(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ ist, folgt für alle $v \in H_0^1(0,1)$
$$a(v,v) \geq \varepsilon\,|v|_{1,2}^2$$
und $a(\cdot,\cdot)$ ist koerzitiv, da nach Bemerkung 4.3 $|\cdot|_{1,2}$ eine Norm in $H_0^1(0,1)$ ist.
Diese Betrachtungen können auch unter den schwächeren Voraussetzungen $b, b', c \in L^\infty(0,1)$ durchgeführt werden, da unter diesen alle auftretenden Integrale wohldefiniert sind. Die Voraussetzung für die Koerzitivität muss dann fast überall in $(0,1)$ gelten.

- Seien $b, c \in L^\infty(0,1)$. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und der Poincaré–Friedrichs–Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\le \varepsilon \|u'\|_0 \|v'\|_0 + \|b\|_\infty \|u'\|_0 \|v\|_0 + \|c\|_\infty \|u\|_0 \|v\|_0 \\
&\le \varepsilon \|u'\|_0 \|v'\|_0 + C_{PF} \|b\|_\infty \|u'\|_0 \|v'\|_0 + C_{PF}^2 \|c\|_\infty \|u'\|_0 \|v'\|_0 \\
&= C \|u'\|_0 \|v'\|_0 = C |u|_{1,2} |v|_{1,2} .
\end{aligned}$$

Somit ist die Bilinearform beschränkt.

□

Abbildung 4.6: Links: Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), rechts: Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921).

Satz 4.10 ***Rieszscher Darstellungssatz.*** *Sei V ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ und der Norm $\|v\|_V = a(v,v)^{1/2}$. Zu jedem stetigen linearen Funktional $f \in V'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in V$ mit*

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall\, v \in V.$$

Des Weiteren ist $u(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems

$$\min_{v\in V} F(v) := \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} a(v,v) - f(v) \right).$$

Beweis: Dieser Satz sollte bereits in vorangegangenen Vorlesungen bewiesen worden sein.

Als erstes wird die Existenz einer Lösung $u(x)$ des Variationsproblems gezeigt. Wegen der Stetigkeit von f gilt die Abschätzung

$$|f(v)| \le c \|v\|_V \quad \forall\, v \in V$$

und daher

$$F(v) \ge \frac{1}{2} \|v\|_V^2 - c \|v\|_V .$$

Der rechte Ausdruck ist eine nach oben geöffnete Parabel in $\|v\|_V$. Somit ist dieser Ausdruck nach unten beschränkt und mit dem notwendigen Kriterium für ein Minimum erhält man $0 = \|v\|_V - c$. Einsetzen ergibt

$$F(v) \ge -\frac{1}{2} c^2.$$

Da das Funktional F nach unten beschränkt ist, existiert

$$d = \inf_{v \in V} F(v)$$

Sei $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, d.h, $F(v_k) \to d$ für $k \to \infty$. Im Hilbert–Raum gilt

$$\|v_k - v_l\|_V^2 + \|v_k + v_l\|_V^2 = 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2 .$$

Es folgt, unter Nutzung der Linearität von f,

$$\begin{aligned}
&\|v_k - v_l\|_V^2 \\
&= 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2 - 4\left\|\frac{v_k+v_l}{2}\right\|_V^2 - 4f(v_k) - 4f(v_l) + 8f\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right) \\
&= 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8F\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right) \\
&\le 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8d \to 0
\end{aligned}$$

für $k, l \to \infty$. Damit ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, die wegen der Vollständigkeit von V einen Grenzwert $u \in V$ besitzt. Da F stetig ist, ist $F(u) = d$ und $u(x)$ ist die Lösung des Variationsproblems.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass jede Lösung des Variationsproblems auch eine Lösung der Gleichung ist. Es ist, unter Nutzung der Bilinearität und Symmetrie,

$$\begin{aligned}
\Phi(\varepsilon) &:= F(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - f(u+\varepsilon v) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon a(u,v) + \frac{\varepsilon^2}{2}a(v,v) - f(u) - \varepsilon f(v)
\end{aligned}$$

für alle $v \in V$. Wenn $u(x)$ das Variationsproblem minimiert, dann besitzt die Funktion $\Phi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Das notwendige Kriterium führt auf die Bedingung

$$0 = \Phi'(0) = a(u,v) - f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Zum Schluss wird die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt. Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ zwei Lösungen der Gleichung. Aus der Differenz der beiden Gleichungen erhält man

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Beziehung gilt speziell für $v(x) = (u_1 - u_2)(x)$ woraus $u_1(x) = u_2(x)$ folgt. Die Lösung des Variationsproblems ist eindeutig auf Grund der Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung. ∎

Beispiel 4.11 Zum Rieszschen Darstellungssatz. Seien $V = H_0^1(0,1)$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx$ und $V' = H^{-1}(0,1)$. Es ist $a(v,v)^{1/2} = |v|_{1,2}$ eine Norm in $H_0^1(0,1)$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt, dass

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$$

für jedes $f \in H^{-1}(0,1)$ eine eindeutige Lösung besitzt. Des Weiteren minimiert diese Lösung das sogenannte Energiefunktional

$$\min_{v\in H_0^1(0,1)} F(v) := \min_{v\in H_0^1(0,1)} \left(\int_0^1 \frac{1}{2}\left(v'(x)\right)^2 - f(x)v(x)\,dx\right).$$

Den Ausdruck unter dem Integral kann man physikalisch als Energie interpretieren. □

Der Satz von Riesz kann wie folgt verallgemeinert werden.

Abbildung 4.7: Frigyes Riesz (1880 – 1956).

Satz 4.12 ***Lemma von Lax[1]–Milgram[2].*** *Sei $b(\cdot,\cdot): V\times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und positiv definite Bilinearform auf dem Hilbert–Raum V. Zu jedem beschränkten linearen Funktional $f \in V'$ gibt es genau ein $u \in V$ mit*

$$b(u,v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in V. \tag{4.4}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Riesz. Dies sollte in einer einführenden Vorlesung über Finite–Elemente–Methoden bereits geschehen sein.

Der Hilbert–Raum V sei mit dem Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot)$ ausgestattet. Im ersten Schritt wird nun eine Lösung von (4.4) konstruiert. Dazu werden mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes lineare Operatoren $T, T' : V \to V$ durch

$$a(Tu,v) = b(u,v) \ \forall\ v \in V, \quad a(T'u,v) = b(v,u) \ \forall\ v \in V \tag{4.5}$$

definiert. Da $b(u,\cdot)$ und $b(\cdot,u)$ stetige lineare Funktionale auf V sind, existieren Tu, $T'u$ und sind eindeutig bestimmt. Weil die Operatoren der Bedingung

$$a(Tu,v) = a(u,T'v)$$

genügen, wird T' der adjungierte Operator zu T genannt. Wir setzen $v = Tu$ in (4.5) und erhalten aus der Beschränktheit von $b(\cdot,\cdot)$

$$\|Tu\|_V^2 = a(Tu,Tu) = b(u,Tu) \le c\,\|u\|_V\,\|Tu\|_V \implies \|Tu\|_V \le c\,\|u\|_V$$

für alle $u \in V$. Damit ist T beschränkt. Da T linear ist, ist T damit stetig. Mit dem gleichen Argument ist auch T' stetig.

Man definiert die Bilnearform

$$d(u,v) := a(TT'u,v) = a(T'u,T'v) \quad \forall\ u,v \in V.$$

Die Bilinearform $d(\cdot,\cdot)$ ist bilinear und symmetrisch. Mit Hilfe der Positivität von $b(\cdot,\cdot)$ und der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhält man

$$m^2\,\|v\|_V^4 \le b(v,v)^2 = a(v,T'v)^2 \le \|v\|_V^2\,\|T'v\|_V^2 = \|v\|_V^2\,d(v,v).$$

Damit, der Beschränktheit von $a(\cdot,\cdot)$ und von T' erhält man

$$m^2\,\|v\|_V^2 \le d(v,v) = a(T'v,T'v) = \|T'v\|_V^2 \le C\,\|v\|_V^2\,.$$

[1] Peter Lax, geb. 1926
[2] Arthur Norton Milgram

Demzufolge ist $d(\cdot,\cdot)$ auch positiv definit und erzeugt ein Skalarprodukt auf V. Die durch $d(v,v)^{1/2}$ erzeugte Norm ist äquivalent zu $\|v\|_V$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt nun, dass es ein $w \in V$ gibt mit

$$d(w,v) = f(v)\ \forall\ v \in V \quad \Longleftrightarrow \quad a(TT'w,v) = b(T'w,v) = (f,v)\ \forall\ v \in V.$$

Offenbar ist nun $u = T'w$ eine Lösung von (4.4).

Die Eindeutigkeit von u wird genauso wie im symmetrischen Fall bewiesen. ■

Folgerung 4.13 Lösung des schwachen Problems (4.3). *Seien $V = H_0^1(0,1)$, $f \in V'$, $b, b', c \in L^\infty(0,1)$ und gelte*

$$c(x) - \frac{b'(x)}{2} \geq 0 \quad \textit{fast überall in } (0,1).$$

Dann besitzt (4.3) genau eine Lösung.

Beweis: Der Beweis folgt mit dem Lemma von Lax–Milgram und den bereits bewiesenen Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$. ■

Satz 4.14 Regularitätsaussage. *Seien die Voraussetzungen von Folgerung 4.13 erfüllt und gelte zusätzlich für ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $b, c \in C^{k-1}([0,1])$ sowie $f, f', \ldots, f^{(k-1)} \in L^2(0,1)$. Dann gilt für die Lösung von (4.3) $u, u', \ldots, u^{(k+1)} \in L^2(0,1)$.*

Beweis: Siehe Literatur, zum Beispiel [GT83]. ■