

Berlin, 08.12.2025

## Numerik I

### Übungsserie 08

**Achtung:** Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Nullstellen von  $p_{n+1}$ .* Sei  $p_{n+1}$  das in Lemma 4.17 definierte Polynom. Man zeige, dass dieses Polynom  $n + 1$  paarweise verschiedene reelle Nullstellen in  $(a, b)$  besitzt.  
Hinweis: Man zeige zunächst, dass es wenigstens eine Nullstelle in  $(a, b)$  gibt und betrachte dann ein Polynom, welches die gleichen Nullstellen wie  $p_{n+1}$  besitzt. **3 Punkte**

2. *Quadraturformeln in Tensorproduktgebieten.* Seien  $I_1 = [a_1, b_1]$  und  $I_2 = [a_2, b_2]$ , dann ist das durch diese Intervalle definierte Tensorproduktgebiet in  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\Omega = I_1 \times I_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I_1, y \in I_2\}.$$

Seien Quadraturformeln für  $I_1$  mit den Stützstellen  $\{x_i \in I_1\}_{i=0}^m$  und Gewichten  $\{\lambda_i\}_{i=0}^m$  sowie für  $I_2$  mit den Stützstellen  $\{y_j \in I_2\}_{j=0}^n$  und Gewichten  $\{\kappa_j\}_{j=0}^n$  gegeben, gemäß Formel (4.11) aus dem Skript.

- i) In  $\Omega$  kann man damit eine Quadraturformel mit den Stützstellen  $\{x_i, y_j\}$ ,  $i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n$  herleiten. Welche Gestalt besitzen die zugehörigen Gewichte?
- ii) Sei  $I_1 = I_2 = [0, 1]$  und die Quadraturformel für beide Intervalle sei die Trapezregel. Man gebe die resultierende Quadraturformel in  $\Omega$  an. Dann approximiere man

$$\int_{\Omega} x^3 y^3 \, dx dy$$

und berechne den Betrag des Fehlers.

- iii) Die Aufgabenstellung ist wie in ii), nur dass die Quadraturformel für beide Intervalle die Gauß-Legendre-Formel für  $n = 1$  ist. Hierfür leite man die Stützstellen und die Gewichte für diese Formel im Intervall  $[0, 1]$  analog zu Beispiel 4.24 aus dem Skript her.

Alle Rechnungen sind in exakter Arithmetik durchzuführen. **6 Punkte**

3. *Romberg-Verfahren und Simpson-Regel.* Jedes Element  $P_{k,j}$ ,  $k = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, k$ , des Romberg-Verfahrens lässt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Man bestimme  $k$  und  $j$  so, dass  $P_{k,j}$  den gleichen Wert ergibt wie derjenige, den man mit der summierten Simpson-Regel erhält. **3 Punkte**

4. *Romberg-Verfahren, Programmieraufgabe.* Der Wert von

$$\int_{-1}^1 \frac{(x - 0.5)^3}{\sqrt{x + 8}} dx$$

soll mit Hilfe des in der Vorlesung eingeführten Romberg-Verfahrens approximiert werden. Dafür schreibe man ein Programm.

Das Integrationsgebiet soll in  $1, 2, 4, \dots, 64$  Intervalle zerlegt werden. Die Fehler zum exakten Integralwert

$$\frac{12371}{20}\sqrt{7} - \frac{229179}{140}$$

sowie das Schema des Romberg-Verfahrens, analog zu Beispiel 4.34 aus dem Skript, sind anzugeben. **4 Punkte**

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 17.12.2025, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.