

Berlin, 10.11.2025

Numerik I

Übungsserie 04

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Eigenschaften der Householder-Transformation.* Man beweise folgende Eigenschaften der Householder-Transformation.

Seien $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ mit $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$ und $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann gelten

- i) $H = H^T$,
- ii) $H^2 = I$,
- iii) $H^T H = I$,
- iv) $H\mathbf{y} = \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, ist äquivalent zu $\mathbf{y}^T \mathbf{u} = 0$,
- v) $H\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.

3 Punkte

2. *Rechnungen zur Householder-Transformation.* Seien $\mathbf{x} = (9, 2, 6)^T$ und $\mathbf{y} = (-11, 0, 0)^T$.

- (a) Man finde die Householder-Transformation H mit $H\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
- (b) Man finde von Null verschiedene Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{z}$ mit

$$H\mathbf{w} = -\mathbf{w} \quad \text{und} \quad H\mathbf{z} = \mathbf{z}.$$

3 Punkte

3. *Methode der kleinsten Quadrate, Programmieraufgabe.* Um den Zusammenhang zwischen Personen-Arbeitsstunden und der Anzahl von chirurgischen Eingriffen zu ermitteln, wurden in 15 Krankenhäusern entsprechende Daten erhoben.

y (Arbeitsstunden/Monat)	x (Anzahl der chirurgischen Eingriffe)
1275	230
1350	235
1650	250
2000	277
3750	522
4222	545
5018	625
6125	713
6200	735
8150	820
9975	992
12220	1322
12750	1900
13014	2022
13275	2155

Für die Abhängigkeit der Arbeitsstunden von der Anzahl der chirurgischen Eingriffe stehen drei Modelle zur Verfügung:

- (a) $y = a + bx$,
- (b) $\ln(y) = a + b/x$,
- (c) $y = a + bx + cx^2$.

- Man schreibe ein Programm zur Lösung der drei linearen Ausgleichsprobleme. Zur Lösung der linearen Systeme nutze man die QR-Zerlegung (in Matlab verwende man die Funktion `qr`, in Python `np.linalg.qr`).
- Man berechne die jeweiligen unbekannten Koeffizienten aus den Ansätzen.
- Man berechne den jeweiligen Kleinst-Quadrate-Fehler. Welches ist der beste Ansatz?
- Man stelle die Ergebnisse graphisch dar.

6 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 19.11.2025, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.