

Berlin, 03.11.2025

Numerik I

Übungsserie 03

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Eigenschaften von Orthogonalmatrizen.* Sei

$$\mathbb{O}_m(\mathbb{R}) := \{Q \in \mathbb{R}^{m \times m} : Q^T = Q^{-1}\}$$

die Menge der Orthogonalmatrizen in $\mathbb{R}^{m \times m}$. Man zeige:

- i) Ist $Q \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$, so ist $Q^T \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$.
- ii) Ist $Q \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$, so ist $|\det(Q)| = 1$.
- iii) Für $Q_1, Q_2 \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$ gilt $Q_1 Q_2 \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$.
- iv) Es gilt $\|Q\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.
- v) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt $\|A\|_2 = \|QA\|_2 = \|AQ\|_2$.
- vi) Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(QA) = \kappa_2(AQ)$.
- vii) Für alle $Q \in \mathbb{O}_m(\mathbb{R})$ gilt $\kappa_2(Q) = 1$.

4 Punkte

2. *Verallgemeinerte Inverse.* Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die verallgemeinerte Inverse $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$ von A ist eindeutig durch die sogenannten Moore–Penrose–Bedingungen bestimmt:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (AA^+)^T = AA^+, \quad (A^+A)^T = A^+A.$$

Man berechne mit Hilfe dieser Bedingungen die verallgemeinerte Inverse von $A = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$.

2 Punkte

3. *Spektralkonditionszahl.* Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Man zeige für die Spektralkonditionszahl

$$\kappa_2(A^T A) = (\kappa_2(A))^2.$$

2 Punkte

4. *Projektion.* Sei V ein Prä-Hilbert-Raum und $P : V \rightarrow V$ linear. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (a) Es ist $(x - Px, y) = 0$ für alle $x \in V$ und alle $y \in \text{im}(P) = \{Pz : z \in V\}$.
- (b) Es gelten $P^2 = P$ und $(Px, y) = (x, Py)$ für alle $x, y \in V$.

2 Punkte

Die Programmieraufgabe von Übungsserie 02 nicht vergessen!

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 12.11.2025, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.