Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 27.10.2025

Numerik I

Übungsserie 02

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Unterschiedliche Bestapproximationen eines Polynoms.* Seien $V = C([-1, 1])$, $f(x) = x^4$ und $U = P_3$ der Raum der Polynome dritten Grades in $[-1, 1]$. Man berechne die Tschebyscheff-Approximation sowie die Bestapproximation in $L^2(-1, 1)$ von f auf U. Von beiden Approximationen ermittle man den Fehler sowohl in der Maximumsnorm als auch in der L^2-Norm. **4 Punkte**

2. *Eigenschaften von Räumen und Basen.* Man löse folgende Aufgaben.

   i) Seien V ein Prä-Hilbert-Raum, U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V und $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von U. Des Weiteren seien $f \in V$ und $u \in U$. Man zeige, dass

   $$(f - u, v) = 0 \quad \forall\ v \in U$$

   genau dann erfüllt ist, wenn es für alle Basisfunktionen von U erfüllt ist.

   ii) Sei $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von U. Man zeige, dass die in der Vorlesung definierte Gramsche Matrix

   $$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j),$$

   symmetrisch und positiv definit ist.

   iii) Man gebe ein Beispiel dafür an, dass $V = C([a, b])$ mit $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$ kein streng normierter Raum ist.

   4 Punkte

3. Abgabe bis 12.11.2025
   Approximation von Funktionen durch Polygonzüge, Programmieraufgabe. Betrachte die Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ und betrache die Bestapproximation in $\|\cdot\|_{L^2}$. Man unterteile das Intervall äquidistant in n Teilintervalle der Schrittweite $h = 2\pi/n$ und verwende zur Approximation den Raum

   $$S_n = \left\{u_n \in C([0, 2\pi])\ :\ u_n|_{[kh,(k+1)h]} \in P_1([kh, (k+1)h]),\ k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

   i) Man bestimme den Fehler

   $$\max_{k=0,\ldots,n} |f(kh) - u_n(kh)| \approx \|f - u_n\|_\infty$$

   für $n = 2^l$, $n = 0, 1, \ldots 128$.

ii) Welche Abhängigkeit des Fehlers von der Schrittweite kann man beobachten?

6 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Mittwoch, 05.11.2025, 10:00** elektronisch in whiteboard abzugeben.