Die Matrix A hat also die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Das ist eine sogenannte Hilbert-Matrix . Die Kondition der Matrix ist verhält sich wie $\mathcal{O}\left((1+\sqrt{2})^{4n}/\sqrt{n}\right)$, sie wächst also exponentiell in n. ¹⁰ Damit muss man bei der Lösung des Normalgleichungssystems schon für relativ kleine Werte von n mit großen Rundungsfehlern rechnen. Die Monome sind als Basis ungeeignet!

Wie bereits in Bemerkung 1.29 festgehalten, ist eine orthogonale Basis ideal für U. Im Beispiel 1.30 wurde die Konstruktion solch einer Basis für das Intervall [-1,1] demonstriert. Man erhält die Legendre-Polynome. Analog kann man natürlich auch für das Intervall [0,1] vorgehen. Auch diese Polynome werden Legendre-Polynome genannt. Man kann die Legendre-Polynome in [0,1] aus den Monomen analog zum Beispiel 1.30 berechnen. Alternativ kann man die Legendre-Polynome in [0,1] aus den Legendre-Polynomen in [-1,1] durch die Variablen-Transformation $x|_{[-1,1]}=2x|_{[0,1]}-1$ bestimmen. Damit erhält man für die ersten drei Polynome

$$\begin{array}{rccc}
1 & \to & 1, \\
x & \to & 2x - 1, \\
\frac{1}{2} \left(3x^2 - 1 \right) & \to & \frac{1}{2} \left(3(2x - 1)^2 - 1 \right) = 6x^2 - 6x + 1.
\end{array}$$

Beispiel 1.40 Bestapproximation in P_n in der Norm $\|\cdot\|_{L^2}$. Es wird nun eine Erweiterung von Beispiel 1.6 betrachtet. Jetzt soll die jeweilige Bestapproximation im Raum P_1 und P_2 gefunden werden.

Nach Bemerkung 1.39 ist es günstig, als Basis die Legendre-Polynome in $[0,\pi]$ zu wählen. Man erhält diese beispielsweise aus den Legendre-Polynomen in [-1,1] durch die Variablentransformation $x|_{[-1,1]} = \frac{2}{\pi}x|_{[0,\pi]} - 1$

$$\begin{array}{rcl}
1 & \to & 1 = p_0, \\
x & \to & \frac{2}{\pi}x - 1 = p_1, \\
\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) & \to & \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)^2 - 1\right) = \frac{6x^2 - 6\pi x + \pi^2}{\pi^2} = p_2.
\end{array}$$

Betrachte zunächst die Bestapproximation in P_1 , das heißt, es ist eine Bestapproximation der Gestalt $u=u_0p_0+u_1p_1$ gesucht. Für das Normalgleichungssystem (1.13) erhält man

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} (p_0,p_0) & (p_1,p_0) \\ (p_0,p_1) & (p_1,p_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sin(x),p_0) \\ (\sin(x),p_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Damit ist die Bestapproximation in P_1 gegeben durch $u = \frac{2}{\pi}$. Man erhält also eine Konstante, siehe Abbildung 1.1. Der Fehler ist

$$\|\sin(x) - u\|_{L^2} = \left(\frac{\pi^2 - 8}{2\pi}\right)^{1/2} \approx 0.5454876555.$$

 $^{^{10}}$ Eine Faustregel ist, dass bei Verwendung eines direkten Lösers (Gauß-Verfahren mit LUZerlegung) und bei einer Kondition von 10^k die letzten k Stellen des Ergebnisses ungenau sind.

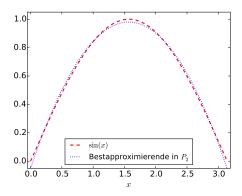


Abbildung 1.7: Bestapproximation von $\sin(x)$ in $[0,\pi]$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ mit einem quadratischen Polynom.

Nun wird die Bestapproximation in P_2 betrachtet. Man kann erwarten, dass man den Sinus in $[0,\pi]$ durch eine nach unten geöffnete Parabel schon recht gut approximieren kann. Die Bestapproximation hat die Gestalt $u=u_0p_0+u_1p_1+u_2p_2$ und für die Normalgleichungen erhält man

$$A\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2\pi^2 - 24}{\pi^2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Damit hat die Bestapproximierende die Gestalt

$$u = \frac{2}{\pi} + \frac{10\pi^2 - 120}{\pi^3} p_2 = \left(\frac{60}{\pi^3} - \frac{720}{\pi^5}\right) x^2 + \left(\frac{720}{\pi^4} - \frac{60}{\pi^2}\right) x + \left(\frac{12}{\pi} - \frac{120}{\pi^3}\right)$$

$$\approx -0.41769x^2 + 1.31224x - 0.05046,$$

siehe Abbildung 1.7. Der Fehler ist

$$\|\sin(x) - u\|_{L^2} = 0.0305999\dots$$

Bemerkung 1.41 Der Fall $U = S_n$. Der Raum S_n besteht aus Polygonzügen über [a, b], welche über einem Gitter $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ definiert sind, siehe

Definition 1.8. Zur Aufstellung des Normalgleichungssystems (1.13) muss man eine günstige Basis in S_n wählen. Hierbei bietet es sich an, möglichst einfache Polygone zu nehmen. Das führt zur sogenannten Knotenbasis $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$, welche durch die Eigenschaft

$$\varphi_i \in S_n : \varphi_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad k = 0, \dots, n,$$
 (1.18)

charakterisiert ist. Hierbei ist δ_{ik} das Kronecker¹¹-Delta. Die Basisfunktion φ_i hat im Knoten i den Wert Eins und sie verschwindet in allen anderen Knoten, siehe Abbildung 1.8

Setzt man $h_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,\ldots,n,$ so erhält man folgende Darstellungen der Basisfunktionen

$$\varphi_0(x) \quad = \quad \left\{ \begin{array}{ll} 1 - \frac{1}{h_1} \left(x - x_0 \right) & \text{für } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{array} \right.$$

 $^{^{11}}$ Leopold Kronecker (1823 – 1891)

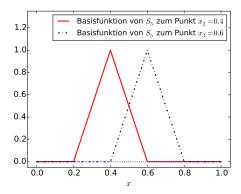


Abbildung 1.8: Basisfunktion von S_5 .

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{h_i} (x - x_i) & \text{für } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ 1 - \frac{1}{h_{i+1}} (x - x_i) & \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{h_n} (x - x_n) & \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases}$$

Auf Grund ihrer Gestalt, nennt man diese Basisfunktionen auch Hütchenfunktionen. Diese Funktionen spielen bei der numerischen Lösung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen eine Rolle und sie werden dort lineare Finite Elemente genannt.

Mit Hilfe der Knotenbasis hat die gesuchte Funktion u die Gestalt

$$u(x) = \sum_{j=0}^{n} u_j \varphi_j(x)$$

mit unbekannten Koeffizienten u_j , $j=1,\ldots,n$. Dieser Polygonzug ist eindeutig bestimmt, wenn man seine Werte in allen Knoten kennt. Man erhält für den Knoten x_i , $i=0,\ldots,n$, wegen der Eigenschaft der Knotenbasis (1.18),

$$u(x_i) = \sum_{j=0}^{n} u_j \varphi_j(x_i) = u_i.$$

Das heißt, aus den Koeffizienten sieht man sofort die Werte des Polygonzuges in den Knoten. $\hfill\Box$

Bemerkung 1.42 Berechnung der Gramschen Matrix im Fall $U=S_n$. Die Funktionen der Knotenbasis besitzen einen lokalen Träger. Sie sind höchstens in zwei nebeneinander liegenden Intervallen von Null verschieden, vergleiche Abbildung 1.8. Damit folgt, dass

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0$$
 falls $|i - j| \ge 2$,

weil dann $\varphi_i(x)\varphi_j(x)\equiv 0$ in [a,b] ist. Damit ist klar, dass die Gramsche Matrix höchstens Einträge in der Diagonalen und den beiden Hauptnebendiagonalen besitzen kann. Sie ist also eine Tridiagonalmatrix.

Zur Berechnung der Matrixeinträge muss man Integrale von Funktionen berechnen, die höchsten in zwei nebeneinander liegenden Teilintervallen von Null verschieden sind. In den Teilintervallen, in denen die Funktionen nicht verschwinden, sind sie quadratisch. Man erhält für i = 1, ..., n-1,

$$\begin{split} a_{ii} &= \left(\varphi_i, \varphi_i\right) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i^2(x) \; \mathrm{d}x \\ &= \left. \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(1 + \frac{1}{h_i} \left(x - x_i\right)\right)^2 \; \mathrm{d}x + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(1 - \frac{1}{h_{i+1}} \left(x - x_i\right)\right)^2 \; \mathrm{d}x \right. \\ &= \left. \left. \frac{h_i}{3} \left(1 + \frac{1}{h_i} \left(x - x_i\right)\right)^3 \right|_{x_{i-1}}^{x_i} + \frac{(-h_{i+1})}{3} \left(1 - \frac{1}{h_{i+1}} \left(x - x_i\right)\right)^3 \right|_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \left. \frac{h_i}{3} + \frac{h_{i+1}}{3} = \frac{1}{3} \left(h_i + h_{i+1}\right). \end{split}$$

Analog berechnet man

$$a_{00} = \frac{h_1}{3},$$

$$a_{nn} = \frac{h_n}{3},$$

$$a_{i,i+1} = a_{i-1,i} = \frac{h_i}{6}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiert man die Hilfsvariablen

$$u_{-1} = u_{n+1} = h_0 = h_{n+1} = 0,$$

dann können die eigentlichen Randpunkte wie innere Punkte betrachtet werden und die Normalgleichungen besitzen die Gestalt

$$\frac{h_i}{6}u_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}u_i + \frac{h_{i+1}}{6}u_{i+1} = (f, \varphi_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Oft werden die Gleichungen mit $6/(h_i + h_{i+1})$ durchmultipliziert. Dann erhält man das Normalgleichungssystem

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_{0} & & & \\ \mu_{1} & 2 & \lambda_{1} & & & \\ & \mu_{2} & 2 & \lambda_{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_{n} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0} \\ u_{1} \\ u_{2} \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_{n} \end{pmatrix}$$

$$= 6 \begin{pmatrix} (f, \varphi_{0})/(h_{0} + h_{1}) \\ (f, \varphi_{1})/(h_{1} + h_{2}) \\ (f, \varphi_{2})/(h_{2} + h_{3}) \\ \vdots \\ (f, \varphi_{n-1})/(h_{n-1} + h_{n}) \\ (f, \varphi_{n})/(h_{n} + h_{n+1}) \end{pmatrix} = \mathbf{b}. \tag{1.19}$$

 $_{
m mit}$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}.$$

Man kann zeigen, dass man die LU-Zerlegung (LR-Zerlegung) einer Tridiagonalmatrix mit $\mathcal{O}(n)$ floating point Operationen berechnen kann, siehe (Kiełbasiński

& Schwetlick, 1988, Kap. 6.4) oder (Schwarz & Köckler, 2011, Kap. 2.3.3). Damit ist das Normalgleichungssystem (1.19) mit optimalem Aufwand lösbar. Eine Abschätzung der Kondition dieser Matrix wird in Satz 1.44 bewiesen. \Box

Beispiel 1.43 Bestapproximation in S_2 in der Norm $\|\cdot\|_{L^2}$. Nun wird Beispiel 1.9 fortgesetzt. Die Basisfunktionen von S_2 mit dem Knoten $x_1=\pi/2$ haben die Form

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\pi} x & \text{für } x \in [0, \pi/2], \\ 0 & \text{für } x \in (\pi/2, \pi], \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) & \text{für } x \in [0, \pi/2], \\ 1 - \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) & \text{für } x \in (\pi/2, \pi], \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \pi/2), \\ 1 + \frac{2}{\pi} (x - \pi) & \text{für } x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Der Ansatz für die Bestapproximierende ist

$$u(x) = u_0 \varphi_0(x) + u_1 \varphi_1(x) + u_2 \varphi_2(x).$$

Für das Normalgleichungssystem erhält man

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_2, \varphi_0) \\ (\varphi_0, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) \\ (\varphi_0, \varphi_2) & (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pi/6}{\pi/12} & \frac{\pi/12}{3} & \frac{\pi}{12} \\ 0 & \frac{\pi}{12} & \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\sin(x), \varphi_0) \\ (\sin(x), \varphi_1) \\ (\sin(x), \varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{\pi} \\ \frac{4}{\pi} \\ 1 - \frac{2}{\pi} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses Systems ist

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi^2} \begin{pmatrix} 8(\pi - 3) \\ -4\pi + 24 \\ 8(\pi - 3) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.11477 \\ 1.15846 \\ 0.11477 \end{pmatrix}.$$

Damit hat die Bestapproximierende die Gestalt

$$u = 0.11477\varphi_0(x) + 1.15846\varphi_1(x) + 0.11477\varphi_2(x),$$

siehe Abbildung 1.9. Der Fehler ist

$$\left\|\sin(x) - u\right\|_{L^2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{32}{\pi} + \frac{192}{\pi^2} - \frac{384}{\pi^3}\right)} \approx 0.11125,$$

was ein wesentlich kleinerer Wert als im Beispiel 1.9 ist.

Satz 1.44 Kondition der Systemmatrix des Normalgleichungssystems (1.19). $Es\ gilt$

$$\kappa_{\infty}(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} \le 3,$$

 $wobei \parallel \cdot \parallel_{\infty} die Zeilensummennorm einer Matrix ist$

$$||A||_{\infty} = \max_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_{\infty}}{||\boldsymbol{x}||_{\infty}} = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$
 (1.20)

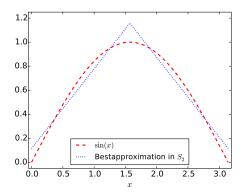


Abbildung 1.9: Bestapproximation von $\sin(x)$ in $[0,\pi]$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$ mit einem Polygon aus S_2 .

Beweis: Da bekannt ist, dass (1.19) für alle rechte Seiten eine eindeutige Lösung besitzt, Folgerung 1.24, muss A eine nicht-singuläre (reguläre) Matrix sein und A^{-1} existiert und ist ebenfalls nicht-singulär.

In jeder Zeile von A gibt es höchstens drei Einträge. Es gelten

$$|\mu_i| + |a_{ii}| + |\lambda_i| = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} + 2 + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 3, \quad i = 1, \dots, n-1$$

und

$$|a_{11}| + |\lambda_0| < 3$$
, $|\mu_n| + |a_{nn}| < 3$.

Also folgt $||A||_{\infty} = 3$.

Der Term $||A^{-1}||_{\infty}$ wird abgeschätzt, wobei jetzt nicht mehr auf die Sonderfälle der Griebung gesondert eingangen wird. Diese können in den allgemeinen $||A^{-1}||_{\infty}$ wird abgeschätzt, wobei jetzt nicht mehr auf die Sonderfälle der Griebung gesondert eingangen wird. Diese können in den allgemeinen $||A^{-1}||_{\infty}$ wird abgeschätzt, wobei jetzt nicht mehr auf die Sonderfälle der Fall durch entsprechend mit Null definierte Variablen integriert werden. Sei $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ beliebig aber fest gewählt. Es gilt

$$(A\mathbf{v})_i = \mu_i v_{i-1} + 2v_i + \lambda_i v_{i+1} \iff v_i = \frac{1}{2} \left((A\mathbf{v})_i - \mu_i v_{i-1} - \lambda_i v_{i+1} \right),$$

 $i=0,\ldots,n$. Dann folgt mit Anwendung der Dreiecksungleichung und der Definition von μ_i und λ_i

$$\begin{split} |v_i| & \leq & \frac{1}{2} \left| (A \boldsymbol{v})_i \right| + \frac{1}{2} \mu_i \left| v_{i-1} \right| + \frac{1}{2} \lambda_i \left| v_{i+1} \right| \\ & \leq & \frac{1}{2} \max_{i=0,...,n} \left| (A \boldsymbol{v})_i \right| + \frac{1}{2} \mu_i \max_{i=0,...,n} \left| v_i \right| + \frac{1}{2} \lambda_i \max_{i=0,...,n} \left| v_i \right| \\ & = & \frac{1}{2} \left\| A \boldsymbol{v} \right\|_{\infty} + \frac{1}{2} \left(\mu_i + \lambda_i \right) \left\| \boldsymbol{v} \right\|_{\infty} \\ & \leq & \frac{1}{2} \left\| A \boldsymbol{v} \right\|_{\infty} + \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{v} \right\|_{\infty}, \quad i = 0, \dots, n. \end{split}$$

Diese Ungleichung gilt für alle Indizes, also gilt sie auch für das Maximum

$$\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{\infty} = \max_{i=0,\dots,n} \left|v_{i}\right| \leq \frac{1}{2} \left\|A\boldsymbol{v}\right\|_{\infty} + \frac{1}{2} \left\|\boldsymbol{v}\right\|_{\infty} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\|\boldsymbol{v}\right\|_{\infty} \leq \left\|A\boldsymbol{v}\right\|_{\infty}. \tag{1.21}$$

Da A^{-1} nicht-singulär ist, bildet A^{-1} den Raum \mathbb{R}^{n+1} auf sich selbst ab. Damit gibt es einen Vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\boldsymbol{v} = A^{-1}\boldsymbol{w}$ für jeden Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Man erhält mit der Definition der Norm (1.20) und (1.21)

$$\left\|A^{-1}\right\|_{\infty} = \max_{\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\left\|A^{-1}\boldsymbol{w}\right\|_{\infty}}{\left\|\boldsymbol{w}\right\|_{\infty}} = \max_{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \frac{\left\|\boldsymbol{v}\right\|_{\infty}}{\left\|A\boldsymbol{v}\right\|_{\infty}} \le 1.$$

Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen.