Anhang C

Weitere integrierbare Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

C.1 Homogene Differentialgleichungen

Definition C.1 Homogene Differentialgleichung. Eine Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{C.1}$$

mit $x > 0$ beziehungsweise $x < 0$ heißt homogene Differentialgleichung. □

Bemerkung C.2 Seien $D(f)$ der Definitionsbereich von $f(x)$ und $\alpha \in D(f)$. Dann ordnet die Differentialgleichung (C.1) allen Punkten der Geraden $y = \alpha x$ die gleiche Richtung zu

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\alpha) = \tan\beta = y'(x).$$

□

Bemerkung C.3 *Transformation einer homogenen Differentialgleichung.* Die Differentialgleichung (C.1) lässt sich unter gewissen Voraussetzungen in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen transformieren. Auf dieser Transformation beruht folgender Satz. □

Satz C.4 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. *Die Funktion $f(x)$ sei in $(a, b) \subset \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \neq 0$, $y_0/x_0 \in (a, b)$ und es sei*

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0}.$$

Dann ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar. Die Funktion $z(x) = y(x)/x$ genügt einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Beweis: Man nutzt den Ansatz

$$y(x) = xz(x) \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = z(x) + xz'(x).$$

Einsetzen in (C.1) ergibt

$$z(x) + xz'(x) = f(z).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für $z(x)$

$$z'(x) = \frac{1}{x}\left(f(z) - z(x)\right). \tag{C.2}$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung nicht verschwindet, benötigt man die Bedingung

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0} = z_0.$$

Die Funktion $y(x)$ löst (C.1) genau dann, wenn die Funktion $z(x)$ (C.2) löst. Das AWP (C.2) mit der Anfangsbedingung $(x_0, z_0) = (x_0, y_0/x_0)$ ist nach Satz 6.12 eindeutig lösbar, da alle in diesem Satz geforderten Bedingungen erfüllt sind. Damit ist auch das Anfangswertproblem der homogenen Differentialgleichung eindeutig lösbar. ■

Bemerkung C.5 Der Fall

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{y_0}{x_0}.$$

führt auf den Fall $g(y_1) = 0$ aus Bemerkung 6.16. □

Beispiel C.6 Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{y^2 - x^2}{2yx}, \quad y(x_0) = y_0,\ x_0 > 0,\ y_0 > 0.$$

Wegen des Nenners benötigt man $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Da in der Anfangsbedingung x_0 und y_0 positiv sind, wird man Lösungen für $x > 0$ und $y > 0$ erwarten können.

Die obige Differentialgleichung ist eine homogene Differentialgleichung, da

$$y'(x) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Für die Koordinaten der Anfangsbedingung gilt

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{2\frac{y_0}{x_0}} < \frac{1}{2}\frac{y_0}{x_0}.$$

Also gilt

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0}.$$

Nutze nun den Ansatz aus dem Beweis von Satz C.4

$$\begin{aligned}
y(x) &= xz(x) \quad \Longrightarrow \quad z(x) > 0 \ \text{ und} \\
z(x) + xz'(x) &= \frac{z^2(x) - 1}{2z(x)} \quad \Longrightarrow \\
z'(x) &= \left(\frac{z^2 - 1}{2z} - z\right)\frac{1}{x} = \left(-\frac{z^2 + 1}{2z}\right)\frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Anwendung der Methode der Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned}
\frac{2z}{z^2 + 1}dz &= -\frac{dx}{x} \quad \Longrightarrow \quad \text{mit Integration} \\
\ln\left(z^2 + 1\right) &= -\ln|x| + c \overset{x \geq 0}{=} \ln\frac{1}{x} + c \quad \Longrightarrow \quad \text{potenzieren} \\
z^2 + 1 &= \exp\left(\ln\frac{1}{x}\right)\underbrace{\exp(c)}_{c_0 > 0} = \frac{c_0}{x}.
\end{aligned}$$

Man erhält wegen $z(x) > 0$

$$z(x) = \sqrt{\frac{c_0}{x} - 1}.$$

Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = xz(x) = \sqrt{c_0 x - x^2}.$$

Die Konstante c_0 wird aus der Anfangsbedingung bestimmt

$$y(x_0) = y_0 = \sqrt{c_0 x_0 - x_0^2} \quad \Longrightarrow \quad c_0 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}.$$

Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

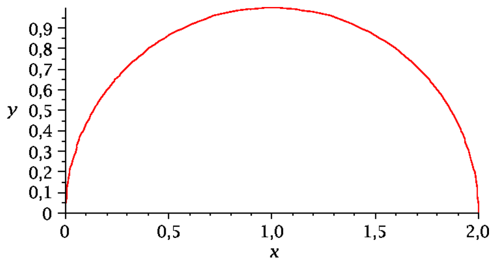
$$y(x) = \sqrt{\frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0} x - x^2}.$$

Dies wird durch die Probe *Übungsaufgabe* bestätigt. Die Probe sollte immer nach der Lösung einer Differentialgleichung durchgeführt werden !

Zur geometrischen Veranschaulichung schreibt man die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0} x &= 0 \quad \Longrightarrow \\ y^2 + \left(x - \frac{1}{2} \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0} \right)^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\left(y_0^2 + x_0^2\right)}{x_0} \right)^2. \end{aligned}$$

Das ist eine Halbellipse mit dem Scheitel auf der positiven x-Achse, siehe Lösung für $x_0 = y_0 = 1$.



□

C.2 Die exakte Differentialgleichung

Definition C.7 Gradientenfeld. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. In G seien die Funktionen $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ definiert. Gibt es eine Funktion $F(x, y) \in C^2(G)$, so dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

gelten, so nennt man das Vektorfeld mit den Komponenten $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ ein Gradientenfeld. □

Satz C.8 *Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet und $P, Q \in C^1(G)$. Notwendig und hinreichend dafür, dass das Vektorfeld $(P(x, y), Q(x, y))^T$ ein Gradientenfeld darstellt ist*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \textit{für alle } (x, y) \in G, \tag{C.3}$$

die sogenannte Integrabilitätsbedingung.

Beweis: *i) Notwendigkeit.* Sei $(P(x,y),Q(x,y))^T = \nabla F(x,y)$ ein Gradientenfeld mit $F \in C^2(G)$. Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \ \forall (x,y) \in G.$$

ii) Hinlänglichkeit. Es wird eine Konstruktion für eine Funktion $F(x,y)$ angegeben, deren partielle Ableitungen gerade die Komponenten des Gradientenfeldes sind.

Sei (C.3) erfüllt. Die Konvexität von G bedeutet, dass jede Gerade, die zwei Punkte aus G miteinander verbindet, vollständig in G liegt. Daraus folgt, dass achsenparallele Geraden den Rand von G höchstens in zwei Punkten schneiden. Betrachte eine Gerade parallel zur x-Achse, die den Rand von G in genau zwei Punkten schneidet. Der linke Schnittpunkt sei (x_0, y_0). Dann gibt es eine Funktion $F_1(x,y)$ mit

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) = P(x,y), \quad \text{da} \quad F_1(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\ dx. \tag{C.4}$$

Dazu wählt man bei festem y eine Stammfunktion bezüglich x von $P(x,y)$. Betrachte jetzt den Ansatz

$$F(x,y) = F_1(x,y) + \phi(y). \tag{C.5}$$

Dann ist $\partial F/\partial x(x,y) = P(x,y)$ erfüllt. Für die andere partielle Ableitung gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) + \phi'(y) = Q(x,y).$$

Daraus folgt

$$\phi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y). \tag{C.6}$$

Damit gilt

$$0 = \frac{\partial \phi'(y)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}(x,y) \overset{(C.4)}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y).$$

Diese Gleichung ist nach Voraussetzung (C.3) erfüllt. Also existiert eine Funktion $\phi(y)$, die für den Ansatz (C.5) geeignet ist und diese lässt sich aus (C.6) bestimmen. Damit ist $(P(x,y),Q(x,y))^T$ ein Gradientenfeld. ■

Bemerkung C.9

- Die Voraussetzungen an das Gebiet im Satz C.8 lassen sich abschwächen. Es reicht ein sternförmiges Gebiet, siehe Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 2, Paragraph 182. Insbesondere sind nicht einfach zusammenhängende Gebiete, also Gebiete mit Loch, nicht sternförmig.
- Man beachte die Beziehung der Aussage von Satz C.8 zur Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

$$\int_C P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy$$

bei festem Anfangs- und Endpunkt der Kurve $C \subset G$.

□

Definition C.10 Exakte Differentialgleichung. Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes Gebiet, $P, Q \in C^1(G)$ mit $Q(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in G$. Weiter sei die Integrabilitätsbedingung (C.3) erfüllt. Dann nennt man die Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{C.7}$$

Exakte Differentialgleichung. □

Satz C.11 Lösung der Exakten Differentialgleichung. *Eine Funktion $y(x)$ mit $y \in C^1(I)$ und $\{(x,y) \ : \ x \in I, y = y(x)\} \subset G$ ist genau dann Lösung der Exakten Differentialgleichung* (C.7)*, wenn*

$$F\left(x, y(x)\right) = const \quad \forall\ x \in I, \quad und \quad \nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$$

gelten.

Beweis: Sei $y(x)$ eine Lösung der Exakten Differentialgleichung, das heißt $y(x)$ erfüllt (C.7). Da die Integrabilitätsbedingung (C.3) erfüllt ist, gibt es nach Satz C.8 eine Funktion $F(x, y)$ mit $\nabla F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T$. Es folgt durch Differentiation, unter Nutzung der Kettenregel für Funktionen mit vektorwertigen Argumenten,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x, y(x)) &:= \big(F(x, y(x))\big)' \overset{\text{KR}}{=} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) \\ &= P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \overset{\text{(C.7)}}{=} 0. \end{aligned} \tag{C.8}$$

Daraus folgt $F(x, y) = const$.

Ist andererseits $F(x, y) = const$, dann folgt $\frac{dF}{dx}(x, y) = 0$ für alle $(x, y) \in G$. Mit der Kettenregel, siehe (C.8), folgt weiter, dass $y(x)$ dann die Exakte Differentialgleichung (C.7) löst. ■

Satz C.12 Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems der Exakten Differentialgleichung. *Seien die Voraussetzungen von Satz C.11 erfüllt. Für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in G$ ist das Anfangswertproblem für die Exakte Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung (x_0, y_0) eindeutig lösbar. Man erhält die Lösung durch Auflösen der Gleichung*

$$F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)(= const) \tag{C.9}$$

nach $y(x)$.

Beweis: Aus Satz C.11 folgt, dass $y(x)$ genau dann Lösung des Anfangswertproblems ist, wenn (C.9) erfüllt ist. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \neq 0 \quad \forall\ (x, y) \in G,$$

ist die Auflösung von (C.9) nach $y(x)$ nach dem Satz über die implizite Funktion eindeutig möglich. ■

Bemerkung C.13 Niveaukurven. Die Graphen der Lösung der Exakten Differentialgleichung stellen im $\mathbb{R}^2$ gerade die Niveaukurven (Höhenlinien, Kurven mit konstantem Funktionswert) der Funktion $F(x, y)$ dar. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass durch jedes $(x_0, y_0) \in G$ genau eine Niveaukurve geht. □

Bemerkung C.14 Nichterfülltsein der Integrabilitätsbedingung. Betrachte eine Differentialgleichung der Gestalt (C.7) bei der bis auf die Integrabilitätsbedingung (C.3) alle Bedingungen von Definition C.10 erfüllt sind. Dann kann diese Differentialgleichung durch Erweiterung mit einer geeigneten Funktion $\lambda(x, y) \in C^1(G)$ exakt gemacht werden. Diese Funktion genügt der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}(x, y), \tag{C.10}$$

die der Integrabilitätsbedingung (C.3) entspricht. Sie wird integrierender Faktor oder Euler[1]scher Multiplikator genannt.

Oft kann man $\lambda(x, y)$ durch erraten oder überprüfen von (C.10) erhalten. □

Beispiel C.15 Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) = -\left(1 + \frac{1}{x + y(x)}\right) \quad \text{mit} \quad (x, y) \in G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 0\}.$$

Es ist

$$y'(x) = -\frac{1 + \frac{1}{x+y(x)}}{1} = -\frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}.$$

Damit folgen, mit der Bezeichnung $y = y(x)$,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) = 0, \ \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{(x + y)^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) \neq \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y).$$

[1]Leonhard Euler (1707 – 1783)

Als integrierenden Faktor kann man $\lambda(x,y) = x + y$ wählen. Dann ist

$$y'(x) = -\frac{\lambda(x,y)P_1(x,y)}{\lambda(x,y)Q_1(x,y)} = -\frac{x+y+1}{x+y} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}. \tag{C.11}$$

Jetzt ist die Differentialgleichung wegen

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$

exakt.

Nun löst man (C.11) mit Integration

$$F_1(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\ dx = \int_{x_0}^{x} (x+y+1)\ dx = \frac{x^2}{2} + xy + x + c.$$

Mit dem Ansatz $F(x,y) = F_1(x,y) + \phi(y)$ erhält man

$$Q(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) + \phi'(y) = x + \phi'(y) \quad \Longrightarrow \quad \phi'(y) = y,$$

also

$$\phi(y) = \frac{y^2}{2} + c.$$

Damit ist

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + x + c = \frac{(x+y)^2}{2} + x + c.$$

Eine explizite Lösung $y(x)$ erhält man durch Auflösen von $F(x,y) = const$ nach y. Ist ein Anfangswertproblem zu lösen, so bestimmt man die Konstante $c \in \mathbb{R}$ durch Einsetzen.

Die Niveaukurven sind durch

$$0 = \frac{(x+y)^2}{2} + x + c.$$

gegeben. Mit der Koordinatentransformation

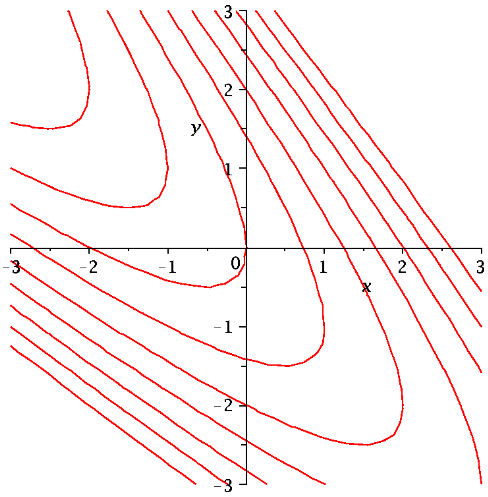
$$\xi = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

erhält man daraus

$$0 = \xi^2 + \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} + c \quad \Longrightarrow \quad \eta = \sqrt{2}\xi^2 + \xi + c.$$

Das sind Gleichungen von Parabeln im ξ-η-Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$. Für die Koordinatenachsen dieses Systems gilt

$$\xi = 0 \implies y = -x, \quad \eta = 0 \implies y = x.$$



Die Lösungen der Differentialgleichung sind die Kurvenstücke oberhalb der Geraden $y = -x$. Diese Kurvenstücke sind Funktionen. □