

Kapitel 7

Lineare Zwei-Punkt-Randwertprobleme

Bemerkung 7.1 *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Randwertprobleme.* Dieses Kapitel betrachtet Probleme, welche lineare gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung beinhalten. In diesen Problemen sind jedoch Daten in den beiden Randpunkten eines begrenzten Intervalls vorgegeben, im Gegensatz zu Anfangswertproblemen, wie sie in Kapitel 6 behandelt wurden. \square

7.1 Das Modellproblem

Definition 7.2 *Lineares Zwei-Punkt-Randwertproblem.* Ein lineares Zwei-Punkt-Randwertproblem besitzt die Gestalt

$$-\varepsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad \text{für } x \in (d, e), \quad (7.1)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_d u(d) + \beta_d u'(d) &= \gamma_d, \\ \alpha_e u(e) + \beta_e u'(e) &= \gamma_e. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Hierbei gelte $b, c, f \in C([d, e])$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ und die Konstanten $\alpha_d, \alpha_e, \beta_d, \beta_e, \gamma_d, \gamma_e$ seien gegeben. \square

Bemerkung 7.3 *Bedeutung linearer Zwei-Punkt-Randwertprobleme.* Das Randwertproblem (7.1), (7.2) ist das einfachste Modellproblem zur Beschreibung von Prozessen, welche Diffusion, Transport und Reaktion beinhalten.

Ein Beispiel aus Goering (1977) ist wie folgt. Fließt einem Strömungsreaktor bei konstanter Temperatur kontinuierlich eine Reaktionsmasse zu und ein Produkt ab, so berechnet sich die Konzentrationsverteilung $c(t, x, y, z)$, $[\text{kmol}/\text{m}^3]$, im Reaktor gemäß der partiellen Differentialgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(cu)}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\operatorname{div}(D \operatorname{grad} c)}_{\text{Diffusion}} = \underbrace{r(c)}_{\text{Reaktion}},$$

wobei $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $[\text{m}/\text{s}]$, der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit, $r(c)$, $[\text{kmol}/\text{m}^3\text{s}]$, eine die Reaktion beschreibende Funktion und D , $[\text{m}^2/\text{s}]$, der Diffusionskoeffizient sind.

Bei einem stationären Reaktorbetrieb, das heißt die zeitliche Änderung ist sehr langsam und kann vernachlässigt werden, bei konstanten Parametern D , \mathbf{u} und wenn die Konzentration sich nur in x -Richtung ändert, erhält man aus der partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung für $c(x)$

$$-Dc''(x) + uc'(x) = r(c(x)).$$

Sei $x \in [0, L]$, wobei L , $[\text{m}]$, die Reaktorlänge bezeichne.

Sowohl für die mathematische Analysis als auch für numerische Simulationen ist der Übergang zu dimensionslosen Problemen wichtig. Mit den dimensionslosen Größen

$$\xi := \frac{x}{L}, \quad \gamma := \frac{c}{c_0},$$

wobei c_0 , $[\text{kmol}/\text{m}^3]$, eine Referenzkonzentration ist, gelangt man zu einer dimensionslosen gewöhnlichen Differentialgleichung. Es gelten mit Kettenregel

$$\frac{d\gamma(\xi)}{d\xi} = \frac{d(c(x)/c_0)}{dx} \frac{dx}{d\xi} = L \frac{c'(x)}{c_0} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\gamma(\xi)}{d\xi^2} = L^2 \frac{c''(x)}{c_0}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt, im Fall $u \neq 0$,

$$-\frac{1}{\text{Pe}}\gamma''(\xi) + \gamma'(\xi) = \rho(\gamma(\xi)), \quad \xi \in (0, 1), \quad \text{mit} \quad \text{Pe} := \frac{uL}{D}, \quad \rho = \frac{L}{uc_0}r.$$

Die dimensionslose Zahl Pe wird Péclet-Zahl¹ genannt. Zur Vervollständigung der Problemstellung sind jetzt noch Randbedingungen für $\xi \in \{0, 1\}$ nötig.

Aus der eben beschriebenen Anwendung heraus werden die Terme in (7.1) wie folgt genannt:

- $-\varepsilon u''$ – Diffusionsterm,
- $b(x)u'$ – Konvektions-, Advektions- oder Transportterm,
- $c(x)u$ – Reaktionsterm.

Das Modellproblem (7.1), (7.2) wird Konvektions-Diffusions-Reaktions-Problem genannt, falls $b(x) \neq 0$ beziehungsweise $c(x) \neq 0$.

Die Péclet-Zahl gibt das Verhältnis von Konvektion und Diffusion an. Falls dieses Verhältnis groß ist, wird dies in der numerischen Lösung von (7.1), (7.2) zu erheblichen Schwierigkeiten führen. \square

Definition 7.4 Randbedingungen.

1. Randbedingungen der Gestalt

$$u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e$$

heißen Randbedingungen erster Art oder Dirichlet²-Randbedingungen,

2. Randbedingungen der Gestalt

$$u'(d) = \gamma_d, \quad u'(e) = \gamma_e$$

heißen Randbedingungen zweiter Art oder Neumann³-Randbedingungen,

3. Seien $\gamma_d, \gamma_e \in \mathbb{R}$, $\alpha_d, \alpha_e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann nennt man

$$\alpha_d u(d) + u'(d) = \gamma_d, \quad \alpha_e u(e) + u'(e) = \gamma_e$$

Randbedingungen dritter Art oder Robin⁴-Randbedingungen.

Dirichlet-Randbedingungen sind in Anwendungen am wichtigsten und sie werden am häufigsten in der Analysis betrachtet. Deshalb wird sich in der Vorlesung auf diese konzentriert werden. \square

Bemerkung 7.5 Normierung eines linearen Zwei-Punkt-Randwertproblems.

- Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \in [0, 1]$ annehmen. Das erreicht man durch die Transformation

$$x \mapsto \frac{x-d}{e-d}.$$

- Man kann ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit homogene Randbedingungen $\gamma_d = \gamma_e = 0$ annehmen, indem man von $u(x)$ eine glatte Funktion $\psi(x)$, welche die ursprünglichen Randbedingungen erfüllt, subtrahiert. Sind beispielsweise Dirichlet-Randbedingungen

$$u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e,$$

gegeben, dann setzt man

$$\psi(x) = \gamma_d \frac{x-e}{d-e} + \gamma_e \frac{x-d}{e-d}$$

¹ Jean Claude Eugene Péclet (1793 – 1857)

² Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)

³ Carl Gottfried Neumann (1832 – 1925)

⁴ Victor Gustave Robin (1855 – 1897)

und

$$u^*(x) = u(x) - \psi(x).$$

Dann ist $u^*(x)$ die Lösung eines linearen Zwei-Punkt-Randwertproblems mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. □

Definition 7.6 Modellproblem. Das Modellproblem ist ein lineares Konvektions-Diffusions-Reaktions-Problem

$$Lu := -\varepsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad (7.3)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (7.4)$$

Hierbei gelten $b, c, f \in C([0, 1])$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 7.7 Differentialoperator. In (7.3) bezeichnet L einen Differentialoperator. Unter einem Operator versteht man eine Abbildung zwischen zwei (Funktionen-)Räumen. Insoweit ist der Begriff des Operators synonym zum Begriff der Abbildung. Ein linearer Operator ist eine lineare Abbildung A auf einem linearen Raum X , so dass

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

für alle Skalare α, β und alle $u, v \in X$ ist. Ein Differentialoperator ist ein Operator, der, angewandt auf geeignete Funktionen, Ableitungen enthält. Zur vollständigen Definition eines Operators ist dessen Definitionsbereich anzugeben.

Der Differentialoperator L ist ein linear Differentialoperator 2. Ordnung (die höchste Ableitung ist die zweite Ableitung) mit dem Definitionsbereich $C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$. □

Beispiel 7.8 Konvektions-Diffusions-Problem. Das Randwertproblem

$$-\varepsilon u'' + u' = 1 \quad \text{auf } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

besitzt die Lösung

$$u(x) = x - \frac{\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Je kleiner der Parameter ε ist, umso steiler wird die Lösung in der Nähe des rechten Randes, siehe Abbildung 7.1. Diesen Teil der Lösung nennt man Grenzschicht. Solche starken Änderungen der Lösung in einem sehr kleinen Bereich führen zu Schwierigkeiten bei der numerischen Approximation der Lösung, vergleiche Beispiel 7.68. □

Bemerkung 7.9 Transformation des Modellproblems auf ein symmetrisches Problem. Sei $b(x)$ hinreichend glatt. Definiert man

$$\tilde{u}(x) := u(x) \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x b(\xi) \, d\xi\right), \quad x \in [0, 1], \quad (7.5)$$

so kann man (7.3), (7.4) in das symmetrische Problem

$$-\varepsilon \tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0,$$

transformieren, wobei

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4\varepsilon} b^2(x) - \frac{1}{2} b'(x) + c(x), \quad \tilde{f}(x) := f(x) \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x b(\xi) \, d\xi\right),$$

sind. *Übungsaufgabe* □

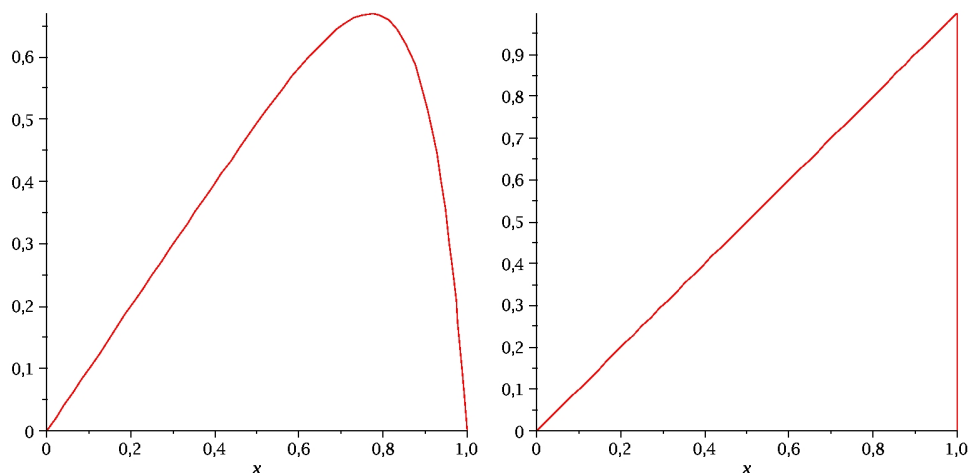


Abbildung 7.1: Beispiel 7.8. Lösung für $\varepsilon = 0.1$ links und $\varepsilon = 0.0001$ rechts.

7.2 Lösungsverhalten

Bemerkung 7.10 *Das Modellproblem.* Für die Untersuchung der Lösbarkeit des Randwertproblems (7.3), (7.4) spielt die Größe von $\varepsilon > 0$ keine Rolle. Nach Division durch ε und Umbenennung der Daten betrachtet man das Problem

$$Lu := -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad (7.6)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (7.7)$$

□

Definition 7.11 **Klassische Lösung.** Eine Funktion $u(x)$ wird klassische Lösung von (7.6), (7.7) genannt, falls

- $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$,
- $u(x)$ erfüllt die Gleichung (7.6) identisch, d.h. für alle $x \in (0, 1)$,
- $u(x)$ genügt den Randbedingungen (7.7).

□

7.2.1 Betrachtung der Differentialgleichung (7.6)

Bemerkung 7.12 *Allgemeines.* Eine klassische Lösung von (7.6) muss die ersten beiden Eigenschaften der obigen Definition besitzen. Da ein lineares Problem untersucht wird, wird man wie üblich die allgemeine Lösung als die Summe einer speziellen Lösung und der allgemeinen Lösung des homogenen Problems darstellen können (Superpositionsprinzip). Die Charakterisierung der allgemeinen Lösung des homogenen Problems erfordert die Einführung einiger neuer Begriffe.

□

Definition 7.13 **Linear unabhängige Funktionen.** Zwei Funktionen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ heißen im Intervall (a, b) linear unabhängig, wenn aus

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b)$$

folgt, dass $c_1 = c_2 = 0$ ist. Sie heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

□

Bemerkung 7.14 *Wronski⁵-Determinante.* Sind zwei in (a, b) linear abhängige Funktionen in (a, b) stetig differenzierbar, so folgt aus der Bedingung für die lineare Abhängigkeit auch, dass

$$c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Demzufolge sind mit $u_1(x), u_2(x)$ auch $u_1'(x), u_2'(x)$ linear abhängig. Das bedeutet, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Es folgt, dass die sogenannte Wronski-Determinante

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

für alle $x \in (a, b)$ gleich Null sein muss. Die Umkehrung gilt allerdings nicht: die Wronski-Determinante kann für alle $x \in (a, b)$ verschwinden, auch wenn zwei Funktionen linear unabhängig sind. Ein Beispiel dazu findet man in (Emmrich, 2004, S. 15). \square

Lemma 7.15 *Lineare Unabhängigkeit zweier Lösungen der homogenen Differentialgleichung.*

Sei $x_0 \in (0, 1)$ beliebig gewählt. Zwei in $(0, 1)$ gegebene klassische Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten sind genau dann linear unabhängig, wenn die zugehörige Wronski-Determinante an der Stelle x_0 ungleich Null ist.

Beweis: Für Interessenten.

i) $W(x_0) \neq 0 \implies$ lineare Unabhängigkeit. Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ klassische Lösungen von

$$-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

wobei $b, c \in C(0, 1)$ sind. Für die Wronski-Determinante gilt dann mit Produktregel

$$\begin{aligned} W'(x) &= (u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x))' \\ &= u_1'(x)u_2'(x) + u_1(x)u_2''(x) - u_1''(x)u_2(x) - u_1'(x)u_2'(x) \\ &= u_1(x)u_2''(x) - u_1''(x)u_2(x) \\ &= u_1(x)(b(x)u_2'(x) + c(x)u_2(x)) - u_2(x)(b(x)u_1'(x) + c(x)u_1(x)) \\ &= b(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)) + c(x)(u_1(x)u_2(x) - u_1'(x)u_2'(x)) \\ &= b(x)W(x). \end{aligned}$$

Mithin löst die Wronski-Determinante die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = b(x)y(x).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist durch die Liouvillesche⁶ Formel, vergleiche (6.11), gegeben. Angewandt auf die Differentialgleichung für $W(x)$ gilt dann für jedes $x_0 \in (0, 1)$

$$W(x) = W(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x b(\xi) \, d\xi \right), \quad x \in (0, 1).$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, ist die Wronski-Determinante genau dann für alle $x \in (0, 1)$ gleich Null beziehungsweise ungleich Null, wenn sie an einer beliebigen Stelle $x_0 \in (0, 1)$ gleich Null beziehungsweise ungleich Null ist. Insbesondere gilt im Fall $W(x_0) \neq 0$ nach Bemerkung 7.14, dass $u_1(x)$ und $u_2(x)$ nicht linear abhängig sind.

ii) *lineare Unabhängigkeit* $\implies W(x_0) \neq 0$. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, $u_1(x)$ und $u_2(x)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen und die Wronski-Determinante verschwinde in $x_0 \in (0, 1)$. Nach Teil i) verschwindet sie dann im gesamten Intervall $(0, 1)$. Dann gibt es eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

⁵ Joseph Marie Wronski (1758 – 1853)

⁶ Joseph Liouville (1809 – 1882)

Betrachte die Funktion

$$v(x) := c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Insbesondere gelten dann $v(x_0) = v'(x_0) = 0$. Wegen der Linearität genügt $v(x)$ ebenfalls der Differentialgleichung. Somit löst $v(x)$ das Anfangswertproblem

$$-v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x) = 0, \quad x \in (x_0, 1), \quad v(x_0) = v'(x_0) = 0$$

für jedes $x_0 \in (0, 1)$. Mit dem globalen Satz von Picard–Lindelöf, Satz 6.52, zeigt man, dass dieses Anfangswertproblem nur die triviale Lösung besitzt. Also ist $v(x) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$. Dies widerspricht jedoch der linearen Unabhängigkeit von $u_1(x)$ und $u_2(x)$. ■

Satz 7.16 Superpositionsprinzip. *Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung*

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = 0, \quad x \in (0, 1),$$

mit Koeffizienten $b, c \in C([0, 1])$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen in $C^2([0, 1])$ und jede klassische Lösung ist als Linearkombination dieser darstellbar.

Beweis: Die Aussagen des Satzes werden mit Hilfe der Theorie von Anfangswertproblemen gezeigt. *i) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.* Man kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung (7.6) als äquivalentes System erster Ordnung schreiben

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}.$$

Nach dem globalen Satz von Picard–Lindelöf, Satz 6.52, gibt es zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $u(x_0), u'(x_0)$, $x_0 \in (0, 1)$, eine eindeutig bestimmte Lösung $(u(x), u'(x))$ des Anfangswertproblems in $[0, 1]$. Jede Komponente der Lösung liegt in $C^1([0, 1])$, woraus $u \in C^2([0, 1])$ folgt.

ii) Existenz von zwei linear unabhängigen Lösungen. Seien $u_1(x)$ die Lösung zu den Anfangswerten $u(x_0) = 1, u'(x_0) = 0$ und $u_2(x)$ zu den Anfangswerten $u(x_0) = 0, u'(x_0) = 1$. Für die Wronski–Determinante gilt

$$W(x_0) = u_1(x_0)u_2'(x_0) - u_1'(x_0)u_2(x_0) = 1.$$

Nach Lemma 7.15 sind $u_1(x)$ und $u_2(x)$ linear unabhängig.

iii) Darstellung jeder klassischen Lösung als Linearkombination. Jede Linearkombination

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ist wieder Lösung der Differentialgleichung. Betrachte, mit $u_1(x), u_2(x)$ aus Teil ii), eine Funktion der Gestalt

$$u(x) = u(x_0)u_1(x) + u'(x_0)u_2(x), \quad x \in [a, b], \quad u(x_0), u'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion erfüllt das Anfangswertproblem zu den beliebig vorgegebenen Anfangswerten $u(x_0), u'(x_0)$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt, dass jede Lösung der Differentialgleichung in dieser Gestalt dargestellt werden kann. ■

Satz 7.17 Klassische Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. *Betrachte die inhomogene, lineare Differentialgleichung*

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Dann gibt es eine klassische Lösung $u_p(x)$, die sogenannte partikuläre Lösung, und jede klassische Lösung ist darstellbar als

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ein System von zwei linear unabhängigen Lösungen (Fundamentalsystem) der zugehörigen homogenen Gleichung ist. Es gilt $u \in C^2([0, 1])$.

Beweis: Mit dem globalen Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf, Satz 6.52, Übungsaufgabe. ■

7.2.2 Betrachtung des Randwertproblems (7.6), (7.7)

Beispiel 7.18 *Nichteindeutigkeit der Lösung eines Dirichlet-Randwertproblems.* Betrachte die Differentialgleichung

$$-u''(x) - u(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Seien die Randbedingungen

$$u(0) = u(\pi/2) = 1$$

gegeben, dann lautet die eindeutig bestimmte Lösung $u(x) = \cos x + \sin x$.

- Sind die Randbedingungen

$$u(0) = u(\pi) = 1$$

gegeben, dann besitzt das Randwertproblem keine Lösung, da gleichzeitig $c_1 = 1$ als auch $c_1 = -1$ gelten müssten.

- Seien die Randbedingungen

$$u(0) = 1, \quad u(\pi) = -1$$

vorgelegt, dann gibt es unendlich viele Lösungen, denn es folgt aus den Randbedingungen lediglich $c_1 = 1$. Der Wert c_2 kann beliebig gewählt werden.

Dieses Beispiel zeigt, dass selbst in einfachen Fällen keine eindeutige Lösung des Randwertproblems (7.6), (7.7) existieren muss. Es wird sich zeigen, dass die Koeffizientenfunktionen bestimmte Bedingungen erfüllen müssen, damit diese Eigenschaft gegeben ist. \square

Satz 7.19 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit homogener rechter Seite. Gegeben sei das Randwertproblem (7.6), (7.7) mit $b \in C^1([0, 1])$, $c \in C([0, 1])$ und $f(x) \equiv 0$. Gilt für alle $x \in (0, 1)$

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4}b^2(x) - \frac{1}{2}b'(x) + c(x) \geq 0, \quad (7.8)$$

so besitzt das Problem (7.6), (7.7) nur die triviale Lösung.

Beweis: Zunächst ist offensichtlich, dass $u(x) \equiv 0$ eine Lösung des gestellten Problems ist.

Angenommen, $u(x) \not\equiv 0$ sei eine weitere klassische Lösung. Nach Satz 7.17 gilt $u \in C^2([0, 1])$. Mit der Transformation (7.5) erhält man das symmetrische⁷ Problem

$$-\tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0.$$

Eine Lösung dieses Problems ist $\tilde{u}(x) \equiv 0$. Sei $\tilde{u}(x)$ eine weitere Lösung. Multipliziere nun die Gleichung mit dieser Lösung und integriere partiell. Das führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(-\tilde{u}''(x)\tilde{u}(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x) \right) dx \\ &= -\tilde{u}''(1)\tilde{u}(1) + \tilde{u}''(0)\tilde{u}(0) + \int_0^1 \left((\tilde{u}'(x))^2 + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left((\tilde{u}'(x))^2 + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x) \right) dx, \end{aligned} \quad (7.9)$$

da $\tilde{u}(x)$ an den Randpunkten verschwindet. Wegen $\tilde{c}(x) \geq 0$ ist der Integrand nichtnegativ, also muss er verschwinden. Daraus folgt insbesondere $(\tilde{u}'(x))^2 = 0$, also $\tilde{u}'(x) = 0$, woraus $\tilde{u}(x)$ gleich konstant folgt. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{u}(x)$ und wegen der Randbedingungen folgt $\tilde{u}(x) \equiv 0$. Daraus ergibt sich mit (7.5) aber auch

$$u(x) = \tilde{u}(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x b(\xi) d\xi\right) \equiv 0,$$

im Widerspruch zur Annahme. ■

⁷Die letzte Zeile in (7.9) ist die symmetrische Bilinearform $(u', v')_{L^2} + (\tilde{c}^{1/2}u, \tilde{c}^{1/2}v)_{L^2}$.

Bemerkung 7.20 *Konstante Koeffizienten.* Im Spezialfall konstanter Koeffizienten reduziert sich Bedingung (7.8) auf

$$D := \frac{b^2}{4} + c \geq 0.$$

Auch für den Fall $D < 0$ kann man das Lösungsverhalten des Randwertproblems genau beschreiben, *Übungsaufgabe.* \square

Bemerkung 7.21 *Anderes Kriterium zur Eindeutigkeit der Lösung des vollhomogenen Randwertproblems.* Betrachte das Randwertproblem (7.6), (7.7) mit homogener rechter Seite. Seien $u_1(x), u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung und bezeichne

$$R := \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Die Koeffizienten bestimmen sich aus den Randbedingungen

$$0 = c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0), \quad 0 = c_1 u_1(1) + c_2 u_2(1),$$

was zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Diese Lösung ist genau dann eindeutig ($c_1 = c_2 = 0$), falls $R \neq 0$ gilt. Genau in diesem Fall besitzt das vollhomogene Randwertproblem nur die triviale Lösung. \square

Bemerkung 7.22 *Zum inhomogenen Randwertproblem.* Betrachte nun das Randwertproblem (7.6), (7.7) mit inhomogener rechter Seite. Seien $u_1(x), u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und

$$A(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}.$$

Für die Betrachtung des Randwertproblems mit inhomogener rechter Seite, wird der Begriff der Greenschen Funktion benötigt. \square

Definition 7.23 *Green'sche Funktion.* Die Funktion $\Gamma(x, \xi)$ heißt Greensche Funktion für das homogene Randwertproblem $Lu = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, wenn:

1. $\Gamma(x, \xi)$ ist stetig auf dem Quadrat $Q := \{(x, \xi) : x, \xi \in [0, 1]\}$.
2. In jedem der Dreiecke

$$Q_1 := \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}, \quad Q_2 := \{(x, \xi) : 0 \leq x \leq \xi \leq 1\}$$

existieren stetige partielle Ableitungen $\Gamma_x(x, \xi)$ und $\Gamma_{xx}(x, \xi)$.

3. Bei festem $\xi \in I = (0, 1)$ ist $\Gamma(x, \xi)$ als Funktion von x eine Lösung von $L\Gamma = 0$ für $x \neq \xi$, $x \in I$.
4. Auf der Diagonalen $x = \xi$ besitzt die erste Ableitung eine Sprung der Form

$$\Gamma_x(x+0, x) - \Gamma_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}, \quad 0 < x < 1,$$

mit⁹

$$p(x) = \exp \left(\int_0^x b(s) \, ds \right).$$

⁸Georg Green (1793 – 1841)

⁹Falls man nicht $\varepsilon = 1$ betrachtet, dann soll $p(x) = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x b(s) \, ds \right)$ gelten.

5. $\Gamma(0, \xi) = \Gamma(1, \xi) = 0$ für alle $\xi \in (0, 1)$. □

Satz 7.24 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit inhomogener rechter Seite. Betrachte das Modellproblem (7.6), (7.7) mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Besitzt das zugehörige Randwertproblem für die Gleichung mit homogener rechter Seite nur die triviale Lösung, so besitzt das Randwertproblem (7.6), (7.7) genau eine klassische Lösung. Diese hat die Gestalt

$$u(x) = \int_0^1 \Gamma(x, \xi) f(\xi) \, d\xi$$

mit der Greenschen Funktion

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{1}{R W(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x) & \text{für } 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ A(x)B(\xi) & \text{für } 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Beweis: Idee. Dass $\Gamma(x, \xi)$ eine Greensche Funktion ist, rechnet man direkt mit Hilfe der Definition nach. Die Existenz einer Lösung zeigt man, indem man nachrechnet, dass $u(x)$ Lösung des Randwertproblems (7.6), (7.7) ist. Die Eindeutigkeit folgt schließlich analog zu Bemerkung 7.21, indem man zeigt, dass sich die freien Parameter der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung unter den gegebenen Voraussetzungen eindeutig bestimmen lassen. ■

Bemerkung 7.25 Zu Satz 7.24. Dass das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, ist beispielsweise gegeben, wenn (7.8) erfüllt ist. Es gibt auch andere hinreichende Bedingungen als (7.8) dafür, dass das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, siehe Folgerung 7.35.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes gilt auch. □

Satz 7.26 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit homogener rechter Seite. Besitzt das inhomogene Randwertproblem (7.6), (7.7) für ein $f(x) \in C([0, 1])$ genau eine klassische Lösung, so besitzt das zugehörige Randwertproblem mit homogener rechter Seite nur die triviale Lösung.

Beweis: Sei $u(x)$ die eindeutige klassische Lösung des inhomogenen Randwertproblems für $f(x)$. Sei $u_h(x)$ eine nichttriviale Lösung des vollhomogenen Randwertproblems, dann folgt auf Grund der Linearität des Problems, dass dann $u(x) + u_h(x)$ eine klassische Lösung des Randwertproblems zum selben $f(x)$ ist, im Widerspruch zur vorausgesetzten Einzigkeit dieser Lösung. ■

Folgerung 7.27 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit beliebigen Dirichlet–Randdaten. Betrachte das Modellproblem (7.6) mit $b \in C^1([0, 1])$, $c, f \in C([0, 1])$ und mit den Dirichlet–Randdaten $u(0) = a$, $u(1) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Gilt für alle $x \in (0, 1)$ die Beziehung (7.8), dann existiert genau eine klassische Lösung.

Beweis: Inhomogene Dirichlet–Randdaten können in die rechte Seite transformiert werden, siehe Bemerkung 7.5. Diese Transformation ist zweimal stetig differenzierbar und sie kann so erfolgen, dass die neue rechte Seite stetig in $[0, 1]$ ist. Für das so erhaltene Problem mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen kann man die obigen Aussagen anwenden. Nach Satz 7.19 besitzt das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung. Aus Satz 7.24 folgt, dass es genau eine klassische Lösung des Problems mit inhomogener rechter Seite gibt. Da die Rücktransformation zweimal stetig differenzierbar ist, existiert damit genau eine klassische Lösung für das Problem mit inhomogenen Dirichlet–Randbedingungen. ■

7.3 Maximumprinzip und Stabilität

Bemerkung 7.28 Betrachteter Differentialoperator. Im Folgenden sei L der durch

$$(Lu)(x) := -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x), \quad x \in (0, 1)$$

definierte lineare Differentialoperator, der für $b, c \in C([0, 1])$ offenbar $C^2(0, 1)$ in $C(0, 1)$ abbildet. □

Lemma 7.29 Abschätzungen für den Differentialoperator. Seien $b \in C([0, 1])$ und $c(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt für jedes $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$

- i) aus $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \leq \max\{u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$,
- ii) aus $(Lu)(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \geq \min\{u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$.

Beweis: Es braucht nur i) gezeigt zu werden. Die Aussage ii) ergibt sich dann, wenn $u(x)$ durch $-u(x)$ ersetzt wird.

Es wird zuerst gezeigt, dass aus der schärferen Voraussetzung $(Lu)(x) < 0$ auf $(0, 1)$ die Behauptung folgt. Angenommen, die Funktion $u(x)$ nimmt ihr Maximum nicht am Rand, sondern im Inneren des Intervalls an. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, 1)$, mit $u'(x_0) = 0$ (lokales Extremum) und $u''(x_0) \leq 0$ (lokales Maximum). Es folgt

$$-u''(x_0) + b(x_0)u'(x_0) = -u''(x_0) \geq 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Nun wird i) gezeigt. Hierzu sei für $\delta, \lambda > 0$

$$w(x) = \delta e^{\lambda x}, \quad x \in [0, 1].$$

Ist λ hinreichend groß, $\lambda > \max_{x \in [0, 1]} b(x)$, so gilt für alle $x \in (0, 1)$

$$(Lw)(x) = -\lambda^2 w(x) + b(x)\lambda w(x) = -\lambda(\lambda - b(x))w(x) < 0.$$

Mit der Linearität des Differentialoperators folgt

$$(L(u + w))(x) = (Lu)(x) + (Lw)(x) < 0.$$

Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$u(x) + w(x) \leq \max\{u(0) + w(0), u(1) + w(1)\}.$$

Für $\delta \rightarrow 0$ ergibt sich die Behauptung. ■

Satz 7.30 Maximumprinzip. Seien $b, c \in C([0, 1])$ und $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ. Dann gilt für jedes $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$

- i) aus $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \leq \max\{0, u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$,
- ii) aus $(Lu)(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \geq \min\{0, u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$.

Beweis: Wiederum ergibt sich die zweite Aussage aus der ersten, wenn man dort $u(x)$ durch $-u(x)$ ersetzt. Da $u(x)$ in $[0, 1]$ stetig ist, ist die Menge

$$\mathcal{M}^+ := \{x \in (0, 1) : u(x) > 0\}$$

entweder leer oder die Vereinigung offener Teilintervalle von $(0, 1)$, Analysis I. Sei $\mathcal{M}^+ = \emptyset$, sei also $u(x)$ in $(0, 1)$ nichtpositiv. Dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

Sei $\mathcal{M}^+ \neq \emptyset$. Dann gilt für $x \in (0, 1)$

$$-u''(x) + b(x)u'(x) \leq -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = (Lu)(x) \leq 0.$$

Nach Lemma 7.29 folgt

$$u(x) \leq \max\{u(0), u(1)\},$$

was die Behauptung auch in diesem Falle zeigt.

Sei nun $\emptyset \neq \mathcal{M}^+ \neq (0, 1)$. Es wird gezeigt, dass \mathcal{M}^+ an 0 oder 1 heranreichen muss. Sei $(a_0, b_0) \subseteq \mathcal{M}^+$. Gelten $a_0 \neq 0$ und $u(a_0) > 0$, so folgt, wegen der Stetigkeit von $u(x)$, dass entweder $u(0) > 0$ oder ein $0 \leq a_1 < a_0$ existiert mit $u(a_1) = 0$. Analoges gilt für b_0 . Man kann daher $a_0 = 0$ oder $u(a_0) = 0$ sowie $b_0 = 1$ oder $u(b_0) = 0$ annehmen. Das heißt man wählt \mathcal{M}^+ größtmöglich. Nach der Voraussetzung gilt für alle $x \in (a_0, b_0)$, und damit für alle $x \in [a_0, b_0]$,

$$(Lu)(x) \leq 0 \implies -u''(x) + b(x)u'(x) \leq -c(x)u(x) \leq 0.$$

Damit kann man wieder Lemma 7.29 anwenden. Es folgt also für alle $x \in (a_0, b_0)$

$$0 < u(x) \leq \max\{u(a_0), u(b_0)\}. \tag{7.10}$$

Offenbar kann nicht zugleich $u(a_0) = u(b_0) = 0$ gelten, denn dies würde dieser Relation widersprechen. Der Fall $a_0 = 0, b_0 = 1$ wurde bereits betrachtet. Es bleiben die Fälle $a_0 = 0$ und $u(b_0) = 0$ sowie $u(a_0) = 0$ und $b_0 = 1$.

Damit ist gezeigt: Ist die Menge \mathcal{M}^+ nicht leer, so gibt es Zahlen $\hat{a}, \hat{b} \in [0, 1]$ mit $\hat{a} \leq \hat{b}$, so dass

$$\mathcal{M}^+ = (0, \hat{a}) \cup (\hat{b}, 1),$$

wobei $u(\hat{a}) = 0$ wenn $\hat{a} \neq 0$, und $u(\hat{b}) = 0$, wenn $\hat{b} \neq 1$. Mit (7.10) gilt für $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \max \left\{ \max_{x \in [0, \hat{a}]} u(x), \max_{x \in [\hat{b}, 1]} u(x), 0 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max\{u(0), u(\hat{a})\}, \max\{u(\hat{b}), u(1)\}, 0 \right\} \\ &= \max\{0, u(0), u(1)\}. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 7.31 *Physikalische Interpretation.* Das Modellproblem (7.6), (7.7) lässt sich schreiben als

$$(Lu)(x) = f(x), \quad u(0) = u_0, u(1) = u_1.$$

Ist $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, das heißt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so gibt es in $(0, 1)$ keine Quellen von $u(x)$. Das Maximumprinzip besagt dann, dass falls wenigstens einer der Randwerte positiv ist, $u(x)$ seinen größten Wert auf dem Rand annimmt. Im Inneren des Intervalls kann $u(x)$ höchstens gleich groß sein. Ist $u(x)$ beispielsweise eine Konzentration und gibt es im Gebiet keine Konzentrationsquellen, dann existiert im Gebiet kein lokales Konzentrationsmaximum, welches höher als die Konzentration am Rand ist. □

Folgerung 7.32 Inverse Monotonie, Isotonie, Vergleichsprinzip. *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.30 folgt für zwei Funktionen $u, v \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ mit $u(0) \leq v(0)$ und $u(1) \leq v(1)$ aus $(Lu)(x) \leq (Lv)(x)$ für $x \in (0, 1)$, dass $u(x) \leq v(x)$ für $x \in [0, 1]$.*

Beweis: Satz 7.30 ist auf die Differenz $(u - v)(x)$ anzuwenden. ■

Satz 7.33 Stabilität der Lösung und stetige Abhängigkeit von den Daten. *Vorgelegt sei das Randwertproblem (7.6), (7.7), mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Ist $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ, so gilt für jede klassische Lösung $u(x)$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{C([0, 1])} \leq \Lambda \|f\|_{C([0, 1])},$$

wobei die Konstante $\Lambda > 0$ von $b(x), c(x)$ abhängt, aber nicht von $f(x)$.

Beweis: Für ein noch zu spezifizierendes $\lambda > 0$ setzt man

$$w(x) := Be^{\lambda x} - A, \quad x \in (0, 1),$$

mit

$$A := \Lambda B, \quad B := \|f\|_{C([0, 1])}, \quad \Lambda := e^\lambda - 1 > 0.$$

Dann gilt für $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} (Lw)(x) &= -(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) Be^{\lambda x} - Ac(x) \\ &\leq -(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) Be^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Nun wählt man λ derart, dass $(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) e^{\lambda x} \geq 1$. Diese Relation ist erfüllt, wenn λ groß genug ist, etwa

$$\lambda \geq \max_{x \in [0, 1]} \left(\frac{b(x)}{2} + \sqrt{\frac{b^2(x)}{4} + c(x) + 1} \right),$$

da $e^{\lambda x} \geq 1$. An dieser Stelle sieht man die Abhängigkeit von Λ von $b(x)$ und $c(x)$. Dann gilt für alle $x \in (0, 1)$

$$(Lw)(x) \leq -B = -\|f\|_{C([0, 1])}.$$

Es folgt für alle $x \in (0, 1)$ mit Hilfe der Normdefinition im Raum der stetigen Funktionen

$$(L(\pm u + w))(x) = \pm f(x) + (Lw)(x) \leq |f(x)| - \|f\|_{C([0,1])} \leq 0.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt

$$\pm u(x) + w(x) \leq \max\{0, \pm u(0) + w(0), \pm u(1) + w(1)\} = \max\{0, w(0), w(1)\}.$$

Damit folgt für alle $x \in (0, 1)$

$$\pm u(x) \leq \max\{0, w(0), w(1)\} - w(x).$$

Aus $e^{\lambda x} \geq 1$ folgt

$$w(x) \geq B - A = w(0), \quad w(1) = Be^\lambda - A,$$

also

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \max\{0, w(0), w(1)\} - w(x) \leq \max\{0, B - A, Be^\lambda - A\} + A - B \\ &= \max\{A - B, 0, B(e^\lambda - 1)\} = \max\{A - B, 0, \Lambda B\} = \max\{A - B, 0, A\} = A, \end{aligned}$$

was die Behauptung war. ■

Bemerkung 7.34 Nichtnormiertes Problem. Für das nichtnormierte Problem (7.1), (7.2) mit Dirichlet-Randbedingungen $u(d) = \alpha$, $u(e) = \beta$ erhält man analog

$$\|u\|_{C([d,e])} \leq \Lambda \|f\|_{C([d,e])} + \max\{|\alpha|, |\beta|\},$$

wobei Λ jetzt auch von $e - d$ abhängen kann, aber nicht von α, β abhängt, (Emmrich, 2004, Satz 2.5.4), Übungsaufgabe.

Dass diese Abschätzung tatsächlich eine Stabilitätsabschätzung ist, sieht man, wenn man sie auf die Differenz $u(x) - \tilde{u}(x)$ anwendet. Dabei sei $u(x)$ Lösung des exakten Problems und $\tilde{u}(x)$ Lösung eines Problems mit gestörter rechter Seite \tilde{f} oder gestörten Randbedingungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Aus der Linearität des Problems folgt sofort

$$\|u - \tilde{u}\|_{C([d,e])} \leq \Lambda \|f - \tilde{f}\|_{C([d,e])} + \max\{|\alpha - \tilde{\alpha}|, |\beta - \tilde{\beta}|\}.$$

Das bedeutet, Änderungen der Lösung hängen stetig, in der Norm von $C([d, e])$, von den Daten ab. □

Folgerung 7.35 Eindeutigkeit der Lösung des homogenen Problems. Gegeben sei das Randwertproblem (7.6), (7.7), mit $b, c \in C([0, 1])$ und $f(x) \equiv 0$. Ist $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ, so besitzt das Problem nur die triviale Lösung $u(x) \equiv 0$.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Abschätzung von Satz 7.33, da $\|f\|_{C([0,1])} = 0$ ist. ■

Bemerkung 7.36 Alternativer Beweis. Diese Aussage folgt auch schon aus dem Maximumprinzip, Satz 7.30, weil für ein homogenes Problem beide Teile i) und ii) dieses Satzes gelten und $u(0) = u(1) = 0$ ist. □

Folgerung 7.37 Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Problems. Vorgelegt sei das Randwertproblem (7.6), (7.7) mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Ist $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ, so besitzt das Randwertproblem genau eine klassische Lösung.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus Folgerung 7.35 und Satz 7.24. ■

Lemma 7.38 Nichtexistenz eines nichtnegativen Maximums. Seien $b, c \in C([0, 1])$, sei $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ und gelte $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$. Gilt $(Lu)(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so kann $u(x)$ kein nichtnegatives Maximum im Inneren des Intervalls annehmen.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein nichtnegatives inneres Maximum $x_0 \in (0, 1)$. Dann sind $u(x_0) \geq 0$, $u'(x_0) = 0$ und $u''(x_0) \leq 0$. Damit folgt

$$(Lu)(x_0) = -u''(x_0) + b(x_0)u'(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

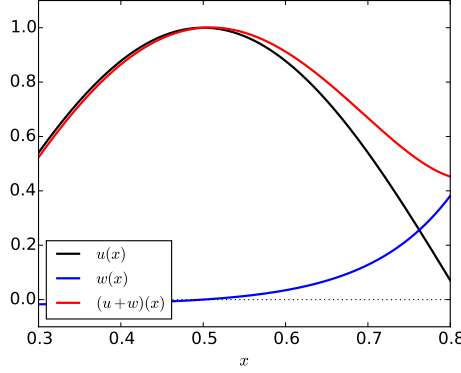


Abbildung 7.2: Illustration zum Beweis von Satz 7.39, $x_0 = 0.5$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.8$.

Satz 7.39 Starkes Maximumprinzip. Seien $b, c \in C([0, 1])$ und sei $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ. Nimmt $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ im Inneren des Intervalls ein nichtnegatives Maximum an und gilt $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so ist $u(x)$ konstant.

Beweis: Die Funktion $u(x)$ nehme in x_0 ein nichtnegatives lokales Maximum an. Es gilt insbesondere $u(x_0) \geq 0$.

Angenommen, $u(x)$ sei nicht konstant. Dann gibt es ein $x_2 \in (0, 1)$ mit $u(x_2) < u(x_0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_2 > x_0$, der Fall $x_2 < x_0$ kann analog behandelt werden. Wähle x_2 und $x_1 \in [0, x_0]$ so, dass $u(x)$ in x_0 das größte lokale Maximum bezüglich $[x_1, x_2]$ annimmt. Dieses wird in einem abgeschlossenen Intervall angenommen.

Es sei für $\delta, \lambda > 0$

$$w(x) := \delta \left(e^{\lambda(x-x_0)} - 1 \right), \quad x \in [x_1, x_2].$$

Offenbar gelten

$$w(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < x_0, \\ = 0 & \text{für } x = x_0, \\ > 0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Nun wählt man λ hinreichend groß, etwa

$$\lambda > \max_{x \in [x_1, x_2]} \left(\frac{b(x)}{2} + \sqrt{\frac{b^2(x)}{4} + c(x)} \right),$$

so dass für alle $x \in (x_1, x_2)$ gilt

$$(Lw)(x) = - \left(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x) \right) \delta e^{\lambda(x-x_0)} - c(x) \delta < 0.$$

Dann gilt nach Voraussetzung auch

$$(L(u+w))(x) = (Lu)(x) + (Lw)(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Jetzt wird δ so klein gewählt, dass

$$u(x_2) + w(x_2) < u(x_0).$$

Daraus folgte, vergleiche Abbildung 7.2,

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &< u(x_0), & \text{für } x \in (x_1, x_0), \\ u(x_0) + w(x_0) &= u(x_0) \geq 0, \\ u(x_2) + w(x_2) &< u(x_0), \end{aligned}$$

womit die Funktion $(u+w)(x)$ in (x_1, x_2) ein nichtnegatives Maximum annimmt. Das steht nach Lemma 7.38 im Widerspruch zu $(L(u+w))(x) < 0$. Demzufolge ist die Annahme, dass $u(x)$ nicht konstant ist, falsch. ■

Bemerkung 7.40 Minimumprinzipien. Durch Ersetzung von $u(x)$ mit $-u(x)$ erhält man aus den Maximumprinzipien entsprechende Minimumprinzipien. □

7.4 Finite-Differenzen-Verfahren

Bemerkung 7.41 *Zu Finite-Differenzen-Verfahren.* Finite-Differenzen-Verfahren sind nur eine von mehreren Möglichkeiten zur Berechnung von numerischen Approximationen der Lösung von Randwertproblemen. Sie sind vom methodischen Standpunkt am einfachsten und deswegen wird sich diese Vorlesung auf die Einführung dieser Verfahren beschränken. \square

7.4.1 Begriffe und Bezeichnungen

Bemerkung 7.42 *Idee.* Die grundlegende Idee von Finite-Differenzen-Verfahren besteht darin, dass man die Ableitungen in der Differentialgleichung durch geeignete finite Differenzen ersetzt. Dazu wird das Intervall $[0, 1]$ mittels eines, der Einfachheit halber, äquidistanten Gitters zerlegt:

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad h = 1/N, \\ \omega_h &= \{x_i : i = 0, \dots, N\} - \text{Gitter.} \end{aligned}$$

\square

Definition 7.43 Gitterfunktion. Ein Vektor $\underline{v}_h = (v_0, \dots, v_N)^T \in \mathbb{R}^{N+1}$, der jedem Gitterpunkt einen Funktionswert zuordnet, heißt Gitterfunktion. Die Restriktion einer Funktion $v \in C([0, 1])$ auf eine Gitterfunktion wird mit $R_h v$ bezeichnet, das heißt

$$\underline{R}_h v := (v(x_0), v(x_1), \dots, v(x_N))^T.$$

\square

Beispiel 7.44 *Gitterfunktionen.* Sei ein Gitter mit den Punkten $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ gegeben. Dann ist die Gitterfunktion zu $v(x) = x^2$

$$\underline{R}_h v = \left(0, \frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, 1\right)^T.$$

Unterschiedliche Funktionen können für ein gegebenes Gitter die gleiche Gitterfunktion haben. Betrachte beispielsweise $v(x) = \sin(4\pi x)$ auf dem obigen Gitter. Die zugehörige Gitterfunktion ist

$$\underline{R}_h v = (0, 0, 0, 0, 0)^T.$$

Dies ist offensichtlich auch die Gitterfunktion von $v(x) = 0$. Das obige Gitter ist zu grob, um die Funktion $v(x) = \sin(4\pi x)$ vernünftig auflösen zu können. \square

Definition 7.45 Differenzenoperatoren. Sei $v(x)$ eine genügend glatte Funktion. Bezeichne $v_i = v(x_i)$, wobei x_i Knoten eines Gitters ist. Die folgenden Differenzenquotienten (finite Differenzen) nennt man

$$\begin{aligned} D^+ v(x_i) &= v_{x,i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h} && - \text{Vorwärtsdifferenz,} \\ D^- v(x_i) &= v_{\bar{x},i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h} && - \text{Rückwärtsdifferenz,} \\ D^0 v(x_i) &= v_{\hat{x},i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} && - \text{zentrale Differenz,} \\ D^+ D^-(v)(x_i) &= v_{\bar{\bar{x}},i} = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} && - \text{zweite Differenz,} \end{aligned}$$

vergleiche Abbildung 7.3. \square

Bemerkung 7.46 *Zu Differenzenquotienten.* Die Formel für $D^+ D^-(v)(x_i)$ kontrolliert man durch direktes Nachrechnen. Weiter gilt

$$D^0 v(x_i) = \frac{1}{2} \left((D^+ v(x_i) + D^- v(x_i)) \right).$$

\square

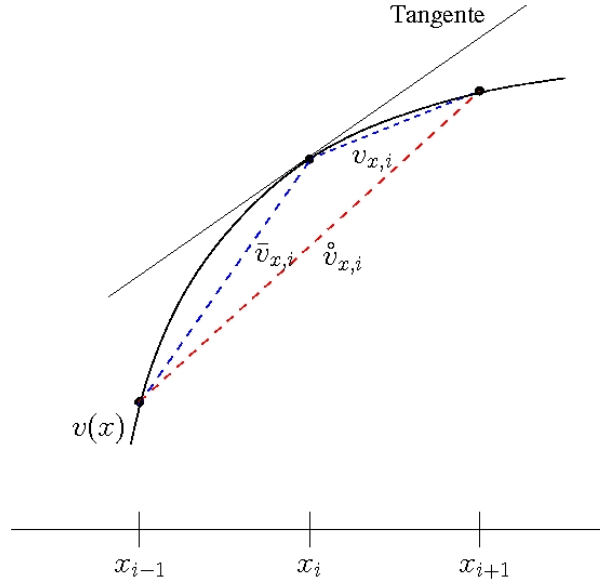


Abbildung 7.3: Illustration der Differenzenquotienten.

Definition 7.47 Konsistenz eines Differenzenoperators, diskrete Maximumsnorm. Sei L ein Differentialoperator. Der Differenzenoperator $L_h : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ heißt mit L konsistent mit der Ordnung k , wenn

$$\max_{0 \leq i \leq N} |(Lv)(x_i) - L_h v_h)_i| =: \|Lv - L_h v_h\|_{\infty, d} = \mathcal{O}(h^k)$$

gilt. Hierbei ist $\|\cdot\|_{\infty, d}$ die diskrete Maximumsnorm im Raum der Gitterfunktionen. \square

Beispiel 7.48 Konsistenzordnungen der Standard-Differenzenoperatoren. Die Konsistenz ist ein Maß für die Approximationsgüte von L_h . Aus der Taylor-Entwicklung für $v(x)$ an der Stelle x_i ergibt sich

$$\begin{aligned} D^+ v(x_i) &= v'(x_i) + \mathcal{O}(h), \\ D^- v(x_i) &= v'(x_i) + \mathcal{O}(h), \\ D^0 v(x_i) &= v'(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ D^+ D^-(v)(x_i) &= v''(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Die Differenzenoperatoren $D^+ v(x_i), D^- v(x_i), D^0 v(x_i)$ sind damit konsistent zu $L = d/dx$ mit der Ordnung 1,1 beziehungsweise 2. Der Operator $D^+ D^-(v)(x_i)$ ist von zweiter Ordnung konsistent mit $L = d^2/dx^2$. \square

7.4.2 Klassische Konvergenztheorie für zentrale Differenzen

Bemerkung 7.49 Betrachtetes Problem. In diesem Abschnitt wird das 2-Punkt-Randwertproblem

$$Lu := -u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad (7.11)$$

betrachtet, das heißt $\varepsilon = 1$, um die klassische Lösungstheorie darzustellen. Es wird angenommen, dass die Parameterfunktionen b, c, f hinreichend glatt sind und dass $c(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gesichert, vergleiche Folgerung 7.37. \square

Definition 7.50 Zentrales Differenzschema. Das zentrale Differenzschema für (7.11) besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} -D^+ D^- u_i + b_i D^0 u_i + c_i u_i &= f_i, \quad \text{für } i = 1, \dots, N-1, \\ u_0 = u_N &= 0. \end{aligned} \quad (7.12)$$

\square

Bemerkung 7.51 *Zum zentralen Differenzenschema.*

- Das zentrale Differenzenschema führt auf ein tridiagonales System linearer Gleichungen

$$r_i u_{i-1} + s_i u_i + t_i u_{i+1} = f_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad u_0 = u_N = 0,$$

mit

$$r_i = -\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h} b_i, \quad s_i = c_i + \frac{2}{h^2}, \quad t_i = -\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h} b_i.$$

- Die folgenden Fragen müssen beantwortet werden:
 - Welche Eigenschaften besitzt das diskrete Problem (7.12)?
 - Was kann man über den Fehler $|u(x_i) - u_i|$ aussagen?

Dazu werden die Konzepte von Konsistenz und Stabilität verwendet.

□

Definition 7.52 Konsistenz eines Differenzenschemas und Konsistenzordnung. Betrachte ein Differenzenschema der Gestalt $L_h \underline{u}_h := \underline{R}_h(Lu)$. Dabei seien die Randbedingungen derart integriert, dass die erste und letzte Zeile von L_h identisch zur ersten und letzten Zeile der Einheitsmatrix sind und $\underline{R}_h(Lu)_0 = u_0$ sowie $\underline{R}_h(Lu)_N = u_N$ gelten. Das Schema wird konsistent von der Ordnung k in der diskreten Maximumsnorm genannt, falls

$$\|L_h \underline{R}_h u - \underline{R}_h(Lu)\|_{\infty, d} \leq Ch^k$$

ist, wobei die positiven Konstanten C und k unabhängig von h sind.

□

Lemma 7.53 Konsistenzordnung des zentralen Differenzenschemas. *Unter der Annahme, dass $u \in C^4([0, 1])$ gilt, besitzt das zentrale Differenzenschema (7.12) die Konsistenzordnung 2.*

Beweis: Mit Taylor-Entwicklung, Übungsaufgabe. ■

Definition 7.54 Stabilität eines Differenzenschemas. Ein Differenzenschema $L_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$ wird stabil in der diskreten Maximumsnorm genannt, wenn es eine Stabilitätskonstante C_S unabhängig von h gibt, so dass

$$\|\underline{u}_h\|_{\infty, d} \leq C_S \|L_h \underline{u}_h\|_{\infty, d} = C_S \|\underline{f}_h\|_{\infty, d}$$

für alle Gitterfunktionen \underline{u}_h gilt.

□

Definition 7.55 Konvergenz eines Differenzenschemas und Konvergenzordnung. Ein Differenzenschema für (7.11) ist konvergent von Ordnung k in der diskreten Maximumsnorm, falls es positive Konstanten C und k unabhängig von h gibt, so dass

$$\|\underline{u}_h - \underline{R}_h u\|_{\infty, d} \leq Ch^k.$$

□

Satz 7.56 Konsistenz + Stabilität \implies Konvergenz. *Ein konsistentes und stabiles Differenzenschema für das Randwertproblem (7.11) ist konvergent. Konsistenz- und Konvergenzordnung sind gleich.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_h - \underline{R}_h u\|_{\infty, d} &\stackrel{\text{Stab.}}{\leq} C_S \|L_h (\underline{u}_h - \underline{R}_h u)\|_{\infty, d} \stackrel{\text{lin.}}{=} C_S \|L_h \underline{u}_h - L_h \underline{R}_h u\|_{\infty, d} \\ &= C_S \|\underline{f}_h - L_h \underline{R}_h u\|_{\infty, d} = C_S \|\underline{R}_h f - L_h \underline{R}_h u\|_{\infty, d} \\ &= C_S \|\underline{R}_h Lu - L_h \underline{R}_h u\|_{\infty, d} \stackrel{\text{Kons.}}{\leq} Ch^k, \end{aligned}$$

wobei die Konstante C das Produkt aus den Konstanten der Stabilitäts- und Konsistenzbedingung ist. ■

Bemerkung 7.57 *Zur Untersuchung von Konsistenz und Stabilität.* Man muss also Konsistenz und Stabilität untersuchen.

- Konsistenzuntersuchungen basieren oft auf Taylor-Entwicklungen und sie laufen dann in der Regel nach dem gleichen Muster ab.
- Stabilitätsuntersuchungen werden nicht nur an Funktionen sondern mit Matrizen und Funktionen durchgeführt, siehe Definition 7.54. Sie sind nicht so einfach und es werden einige neue Begriffe benötigt, die im folgenden bereitgestellt werden.

□

Definition 7.58 Natürliche Ordnung von Vektoren und Matrizen, invers-monotone Matrix. Seien $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann schreibt man $\underline{x} \leq \underline{y}$ genau dann, wenn $x_i \leq y_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt. Die Notation $\underline{x} \geq \underline{1}$ bedeutet $x_i \geq 1$ für alle $i = 1, \dots, n$. Analog bedeutet für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Bezeichnung $A \geq 0$, dass $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt.

Eine Matrix A , für welche A^{-1} existiert mit $A^{-1} \geq 0$, wird invers-monotone Matrix genannt. □

Lemma 7.59 Diskretes Vergleichsprinzip. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invers-monoton. Gilt $A\underline{v} \leq A\underline{w}$ für $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$, dann folgt $\underline{v} \leq \underline{w}$.

Beweis: Diese Lemma ist ein diskretes Analogon zum Vergleichsprinzip von Folgerung 7.32. Nach Voraussetzung gilt

$$A(\underline{v} - \underline{w}) := \underline{b} \leq \underline{0}.$$

Multiplikation mit A^{-1} ergibt

$$\underline{v} - \underline{w} = A^{-1}\underline{b} \leq \underline{0}.$$

Die letzte Ungleichung folgt daraus, dass A invers-monoton ist. Nichtnegative Matrixeinträge werden mit nicht-positiven Vektoreinträgen von \underline{b} multipliziert. Man erhält als Ergebnis einen Vektor mit nichtpositiven Komponenten. ■

Definition 7.60 M-Matrix. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird M-Matrix genannt, falls:

1. $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$,
2. A^{-1} existiert mit $A^{-1} \geq 0$.

□

Bemerkung 7.61 M-Matrizen. M-Matrizen sind eine wichtige Teilklasse der Klasse der invers-monotonen Matrizen. Die zweite Bedingung der Definition ist im allgemeinen schwer zu überprüfen. Es gibt aber auch handlichere Charakterisierungen von M-Matrizen. □

Satz 7.62 M-Matrix-Kriterium. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $a_{ij} \leq 0$ für $i \neq j$. Dann ist A eine M-Matrix genau dann, wenn ein Vektor $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{e} > \underline{0}$, existiert, so dass $A\underline{e} > \underline{0}$. In diesem Fall gilt für die Zeilensummennorm

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\|\underline{e}\|_{\infty, d}}{\min_k (A\underline{e})_k}. \quad (7.13)$$

Der Vektor \underline{e} wird majorisierendes Element genannt.

Beweis: Siehe Literatur, zum Beispiel (Barrenechea et al., 2025, Lemmata 3.47, 3.60). ■

Bemerkung 7.63 Zum M-Matrix-Kriterium.

- Das folgende Rezept ist oft erfolgreich, um ein majorisierendes Element zu konstruieren:
 - Finde eine Funktion $e(x) > 0$, so dass $(Le)(x) > 0$ für $x \in (0, 1)$. Das ist ein majorisierendes Element des Differentialoperators L .
 - Schränke $e(x)$ auf die Gitterfunktion \underline{e}_h ein.

Falls der erste Schritt in dieser Herangehensweise möglich ist, und die Diskretisierung konsistent ist, dann funktioniert die Herangehensweise im allgemeinen, zumindest für hinreichend kleine Gitterweite.

- Mit (7.13) kann man die Konstante C_S in der Stabilitätsdefinition abschätzen

$$\|\underline{u}_h\|_{\infty,d} = \|A^{-1} \begin{pmatrix} f_h \end{pmatrix}\|_{\infty,d} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} \|f_h\|_{\infty,d} = \|A^{-1}\|_{\infty} \|L_h \underline{u}_h\|_{\infty,d},$$

also gilt für diese Konstante

$$C_S \leq \frac{\|\underline{e}\|_{\infty,d}}{\min_k (A\underline{e})_k}.$$

Das heißt, aus dem M-Matrix-Kriterium, welches äquivalent zur M-Matrix-Eigenschaft ist, folgt Stabilität, falls die rechte Seite der Abschätzung unabhängig von h beschränkt werden kann.

- Für Dirichlet-Randbedingungen eliminiert man die Variablen u_0 und u_N bevor man Satz 7.62 anwendet.

□

Beispiel 7.64 *Zum M-Matrix-Kriterium.* Betrachte (7.11) mit $b(x) \equiv 0$

$$Lu(x) = -u''(x) + c(x)u(x), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad c(x) \geq 0 \text{ in } [0, 1].$$

Wähle $e(x) := \frac{1}{2}x(1-x)$. Dann folgt

$$Le(x) = 1 + c(x)e(x) \geq 1.$$

Nun setzt man $\underline{e}_h := \underline{R}_h e$. Damit ergibt sich

$$(L_h \underline{e}_h)_i = -D^+ D^- e_{h,i} + c_i e_{h,i} = 1 + c_i e_{h,i} \geq 1,$$

weil der zweite Differenzenquotient die zweite Ableitung von quadratischen Funktionen in inneren Gitterpunkten exakt diskretisiert, siehe Beispiel 7.48. Das heißt

$$L_h \underline{e}_h \geq (1, \dots, 1)^T \iff A\underline{e} \geq \underline{1}.$$

Für die Abschätzung der Stabilitätskonstanten erhält man

$$C_S \leq \frac{\|\underline{e}\|_{\infty,d}}{\min_k (A\underline{e})_k} \leq \frac{e(1/2)}{1} = \frac{1/8}{1} = \frac{1}{8}. \quad (7.14)$$

Dieses Beispiel zeigt, dass im Fall $b(x) \equiv 0$ die M-Matrix Eigenschaft ohne Einschränkungen an die Feinheit des Gitters gilt. □

Lemma 7.65 Stabilität des zentralen Differenzenschemas für hinreichend feines Gitter. *Für hinreichend kleine Gitterweite h ist das zentrale Differenzenschema (7.12) für das Randwertproblem (7.11) in der diskreten Maximumsnorm stabil. Dann ist die Koeffizientenmatrix eine M-Matrix.*

Beweis: Sei $e(x)$ die Lösung des Randwertproblems

$$-e'' + b(x)e' = 1, \quad e(0) = e(1) = 0.$$

Nach dem Maximumprinzip, Lemma 7.29, gilt $e(x) \geq 0$ für $x \in (0, 1)$. Da kein Term ohne Ableitung vorhanden ist, folgt nach Folgerung 7.37, dass das obige Problem eindeutig lösbar ist und insbesondere $e \in C([0, 1])$ gilt. Damit ist $e(x)$ beschränkt. Für innere Gitterpunkte gilt wegen $c(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} (L_h \underline{e}_h)_i &= (\underline{R}_h Le)_i + (L_h \underline{e}_h - \underline{R}_h Le)_i \\ &= (\underline{R}_h (1 + c(x)e(x)))_i + \left(-D^+ D^- \underline{e}_h + b_i D^0 \underline{e}_h + c_i \underline{e}_h - 1 - c_i \underline{e}_h \right)_i \\ &\geq 1 + \left(-D^+ D^- \underline{e}_h + b_i D^0 \underline{e}_h - 1 \right)_i \\ &= \left(-D^+ D^- \underline{e}_h + b_i D^0 \underline{e}_h \right)_i. \end{aligned}$$

Da \underline{e}_h die zu $e(x)$ gehörende Gitterfunktion ist, approximiert der Ausdruck in der letzten Zeile für hinreichend feines h den Term $-e''(x_i) + b(x_i)e'(x_i) (= 1)$ hinreichend gut, siehe die Konsistenzabschätzungen in Beispiel 7.48. Insbesondere gibt es ein $H > 0$, so dass für alle $h \in (0, H]$ gilt

$$(L_h \underline{e}_h)_i \geq \frac{1}{2}.$$

Damit kann man für $h \in (0, H]$ die Stabilitätskonstante, ähnlich wie in (7.14), unabhängig von der Gitterweite nach oben beschränken. Das M-Matrix-Kriterium beweist nun die Aussage des Lemmas. ■

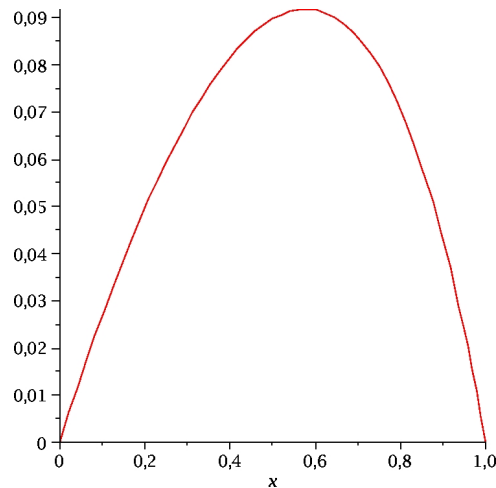


Abbildung 7.4: Beispiel 7.67. Numerische Approximation der Lösung mit dem zentralen Finite-Differenzen-Verfahren.

Tabelle 7.1: Beispiel 7.67. Fehler für unterschiedliche Gitterweiten.

Intervalle N	$\ u - \underline{u}_h\ _{\infty, d}$
4	4.2388e-4
8	9.8811e-5
16	2.4529e-5
32	6.1537e-6
64	1.5368e-6
128	3.8440e-7
256	9.6093e-8
512	2.4023e-8
1024	6.0058e-9

Folgerung 7.66 Konvergenz zweiter Ordnung des zentralen Differenzenschemas. *Unter der Annahme, dass $u \in C^4([0, 1])$ gilt, konvergiert das zentrale Differenzenschema (7.12) von zweiter Ordnung.*

Beweis: Das folgt aus Satz 7.56, indem man Lemmata 7.53 und 7.65 kombiniert. ■

Beispiel 7.67 *Illustration der Konvergenzaussage mit Hilfe eines numerischen Beispiels.* Betrachte das 2-Punkt-Randwertproblem

$$-u''(x) + 2u'(x) + 3u(x) = 1 \quad \text{in } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Die Lösung dieses Problems lautet

$$u(x) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1 - e^{-1}}{e^{-1} - e^3} e^{3x} + \frac{e^3 - 1}{e^{-1} - e^3} e^{-x} \right).$$

Eine numerische Approximation der Lösung ist in Abbildung 7.4 zu sehen.

Tabelle 7.1 präsentiert den Fehler für unterschiedliche Gitterweiten. Man erkennt, dass für hinreichend feine Gitter, sich der Fehler bei einer Halbierung der Gitterweite um den Faktor Vier verringert. Das ist Konvergenz von zweiter Ordnung. □

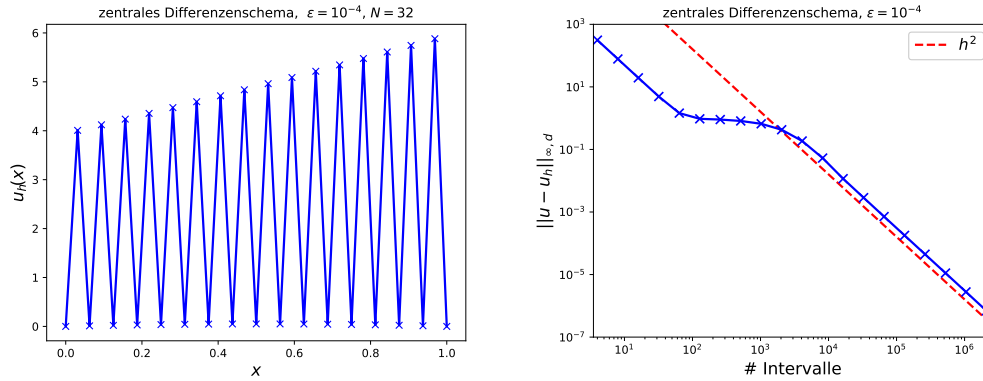


Abbildung 7.5: Beispiel 7.68. Numerische Ergebnisse für das zentrale Differenzenschema.

7.4.3 Ausblick

Beispiel 7.68 Zentrales Differenzenschema angewandt auf ein Problem mit kleiner Diffusion. Betrachte das Konvektions-Diffusions-Problem aus Beispiel 7.8 mit $\varepsilon = 10^{-4}$. Ergebnisse, die mit dem zentralen Differenzenschema berechnet wurden sind in Abbildung 7.5 dargestellt.

Man sieht einerseits, dass die Lösung auf groben Gittern im gesamten Intervall unphysikalische Oszillationen besitzt. Andererseits konvergiert der Fehler auf hinreichend feinen Gittern von zweiter Ordnung. Hinreichend fein beginnt etwa ab $h \approx 1/10000$, was der Breite der Grenzschicht entspricht. Man hat also erst Konvergenz, wenn die Grenzschicht aufgelöst ist.

In Anwendungen ist jedoch oft $\varepsilon \leq 10^{-6}$, so dass man sehr feine Gitter braucht, um das zentrale Differenzenschema anwenden zu können. In einer Dimension ist das heute oft möglich, für Probleme in zwei oder drei Dimensionen jedoch nicht. Insgesamt ist das zentrale Differenzenverfahren bei Problemen, bei denen die Konvektion sehr viel größer als die Diffusion ist, nicht brauchbar. Man benötigt spezielle numerische Verfahren. \square

Bemerkung 7.69 Ausblick. Randwertprobleme oder Anfangs-Randwertprobleme dienen als Modelle für viele physikalische Prozesse. Dann ist das zu Grunde liegende Gebiet im allgemeinen nicht mehr eindimensional und man hat eine partielle Differentialgleichung.

Die Analysis solcher Probleme wird in Vorlesungen zu partiellen Differentialgleichungen oder auch in der Funktionalanalysis behandelt. In der Vorlesung Numerik III werden die wichtigsten Klassen von Verfahren zur Berechnung numerischer Lösungen von Randwertproblemen mit partiellen Differentialgleichungen behandelt:

- die Finite-Differenzen-Methode (FDM), in höheren Dimensionen gibt es neue Aspekte, beispielsweise wenn das Gebiet kein Parallelepiped (Rechteck in zwei Dimensionen) ist,
- die Finite-Elemente-Methode (FEM),
- die Finite-Volumen-Methode (FVM).

Für den Fall dass ε sehr klein ist im Vergleich zur Konvektion, genauer, dass die Gitter-Péclet-Zahl

$$\text{Pe} := \frac{h \|\underline{b}\|_{L^\infty(\Omega)}}{\varepsilon}$$

groß ist, braucht man spezielle Verfahren, siehe die Monographien Roos *et al.* (2008); Barrenechea *et al.* (2025). Diese werden in Spezialvorlesungen diskutiert. \square