Kapitel 6

Anfangswertprobleme

6.1 Einführung

Bemerkung 6.1 *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme.* Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen eine Funktion einer skalaren Variablen $y(x)$ gesucht ist, welche eine Gleichung der Form

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{6.1}$$

erfüllt. Differentialgleichungen erhält man bei der Modellierung von Prozessen aus der Natur und der Wirtschaft.

Um eine konkrete Lösung von Differentialgleichungen vom Typ (6.1) zu berechnen, braucht man noch Zusatzinformationen. Sind geeignete Daten zu einem gewissen Punkt x_0 gegeben, so spricht man von Anfangswertproblemen. □

Beispiel 6.2 *Die Schwingungsdifferentialgleichung.* Betrachte die Schwingung einer Feder. Es bezeichne, bereits als entdimensionierte (ohne physikalische Einheit) Größen,

- t – Zeit,
- $y(t)$ – Ort,
- $y'(t)$ – Geschwindigkeit,
- $y''(t)$ – Beschleunigung,
- y_0 – Ursprungslage der Feder im Nullpunkt des Koordinatensystems $t = 0$.

Aus dem Newtonschen Gesetz $F = ma$ folgt mit $m = 1$, $a = y''(t)$, der Federkonstanten $\beta > 0$ und der Reibungskonstanten $\alpha > 0$

$$y''(t) = \underbrace{-\beta y(t)}_{\text{Rückstellkraft}} \underbrace{-\alpha y'(t)}_{\text{Reibungskraft}} \underbrace{+g(t)}_{\text{äußere Kraft}} . \tag{6.2}$$

Das ist die Schwingungsdifferentialgleichung. Hier wird in (6.2) der Fall $g(t) = 0$ betrachtet.

Bei der Federschwingung sind zwei grundsätzlich unterschiedliche Situationen möglich:

1. Die Reibungskraft ist groß im Vergleich zur Federkraft. Dann wird die Feder nicht wirklich schwingen, sondern sich einfach in ihre Ursprungslage y_0 zurückbegeben.
2. Die Reibungskraft ist klein im Vergleich zur Federkraft. Dann wird man eine (gedämpfte) Schwingung erhalten.

1. Fall: große Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft. Man macht den Ansatz für eine exponentiell abklingende Funktion

$$y(t) = ae^{bt}, \quad b < 0, \ a \neq 0.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in (6.2) ergibt

$$ab^2 e^{bt} = -\beta a e^{bt} - \alpha a b e^{bt} = -a\left(\beta + \alpha b\right) e^{bt}.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls

$$b^2 = -(\beta + \alpha b) \quad \Longleftrightarrow \quad b_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}.$$

Da b reell sein soll, erhält man damit eine mathematische Bedingung dafür, dass die Reibungskraft groß im Vergleich zur Federkraft ist:

$$\frac{\alpha^2}{4} \geq \beta.$$

Im Fall, dass die Gleichheit in dieser Beziehung nicht gilt, erhält man zwei negative Lösungen für b, also auch zwei Lösungen aus dem Ansatz. Man rechnet leicht nach, dass jede Linearkombination eine Lösung von (6.2) ist

$$y(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}, \ a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Es wird gezeigt, dass diese Kurve höchstens eine Nullstelle besitzt. Umstellen der Nullstellengleichung ergibt

$$1 = -\frac{a_2}{a_1} e^{(b_2 - b_1)t}, \quad a_1 \neq 0.$$

Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion kann es höchstens einen Wert t geben, der diese Gleichung erfüllt. In Abbildung 6.1 ist eine mögliche Lösung im Falle der Anfangsauslenkung $y(0) = 1$ dargestellt, für die Parameter $\alpha = 3, \beta = 1, a_1 = -1, a_2 = 2$.

Im Fall der Gleichheit $\alpha^2/4 = \beta$ kann man nachrechnen, dass neben $e^{-\alpha t/2}$ auch $te^{-\alpha t/2}$ eine Lösung von (6.2) ist und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\alpha t/2}, \ a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Beide Fälle werden als aperiodischer Kriechfall bezeichnet.

2. Fall: kleine Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft. In diesem Fall wird man eine gedämpfte Schwingung erwarten. Die Dämpfung kann man wieder mit einer Exponentialfunktion beschreiben und die Schwingung mit einer Winkelfunktion. Ein geeigneter Ansatz ist

$$y(t) = e^{at} \left(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt) \right), \quad a < 0, b \neq 0.$$

Man schreibt diesen Ansatz zunächst in anderer Form. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^+$. Setzt man $c_1 = A \cos\lambda$, $c_2 = A \sin\lambda$, so erhält man mit einem Additionstheorem für die Kosinusfunktion

$$y(t) = Ae^{at} \left(\cos\lambda \cos(bt) + \sin\lambda \sin(bt) \right) = Ae^{at} \cos(bt - \lambda).$$

Einsetzen in (6.2) liefert

$$Ae^{at} \Big((a^2 - b^2 + \alpha a + \beta) \cos(bt - \lambda) - b(2a + \alpha) \sin(bt - \lambda) \Big) = 0.$$

Das ist genau dann erfüllt, wenn der letzte Faktor für alle t verschwindet, also wenn

$$a = -\frac{\alpha}{2}, \quad b = \pm\sqrt{a^2 + \alpha a + \beta} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} + \beta} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha^2}{4} + \beta}.$$

gelten. Die Lösung ist eine gedämpfte Schwingung, siehe in Abbildung 6.1 für $\alpha = 0.1, \beta = 3, \lambda = 1, A = 2$ und den Anfangswert $y(0) = 1$.

In beiden Fällen stellt man fest, dass man aus dem gegebenen einen Anfangswert noch keine Lösung des Anfangswertproblems bestimmen kann, da man zwei unbekannte Koeffizienten festlegen muss. Dazu braucht man beispielsweise zwei Bedingungen für den Anfangspunkt, zum Beispiel für $y(0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $y'(0)$. □

Bemerkung 6.3 *Allgemeine Situation.* Im Allgemeinen kann man eine Differentialgleichung nur in Spezialfällen analytisch lösen. Generell kann man jedoch Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (6.1) mit geeigneten Anfangsbedingungen untersuchen. Zudem kann man sich mit Hilfe von numerischen Näherungsverfahren eine Vorstellung von der Gestalt der Lösung verschaffen, obwohl man keine explizite Formel für diese besitzt. □

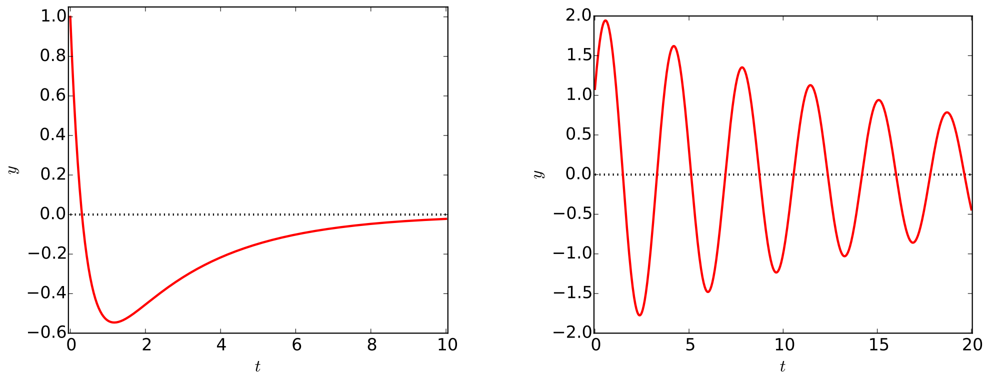

Abbildung 6.1: Beispiele für Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung, links: aperiodischer Kriechfall, rechts: gedämpfte Schwingung.

6.2 Grundbegriffe, einige integrierbare Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Bemerkung 6.4 *Inhalt.* Dieses Kapitel behandelt einige Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung, bei denen man, teilweise nur in Spezialfällen, die Lösung analytisch berechnen kann. Weitere Typen finden Interessenten im Anhang C. □

6.2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 6.5 Gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung wird von erster Ordnung genannt, wenn in ihr keine höhere Ableitung von $y(x)$ als die erste Ableitung vorkommt. Die allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung lautet

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0.$$

Eine Funktion $y(x)$ ist Lösung dieser Gleichung in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wenn $y(x)$ in I differenzierbar ist und $F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung wird explizit genannt, wenn man sie in der Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(x, y(x)) \tag{6.3}$$

schreiben kann, wobei $f(x, y)$ eine auf einer Menge G der (x, y)-Ebene erklärte reellwertige Funktion ist. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von (6.3), wenn $y(x)$ in I differenzierbar ist und für alle $x \in I$ gilt

$$\text{ist} \quad (x, y(x)) \in G, \quad \text{dann} \quad y'(x) = f(x, y(x)).$$

□

Beispiel 6.6 *Organisches Wachstum.* Die absolute Wachstumsrate von Bakterienkulturen auf unerschöpflichem Nährboden ist proportional zur Anzahl N der im Augenblick t vorhandenen Bakterien

$$N'(t) = \alpha N(t). \tag{6.4}$$

Hierbei ist α die relative Wachstumsrate der Bakterienart. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare und demzufolge stetige Funktion. Das steht streng genommen im Widerspruch zur Tatsache, dass N eine natürliche Zahl sein muss. In der Praxis ist N jedoch sehr groß, so dass man mit dem mathematischen Modell, welches durch die Differentialgleichung (6.4) gegeben ist, nur einen kleinen Modellfehler begeht. Die Lösung von (6.4) wird im Abschnitt 6.2.3 behandelt.

Für Ableitungen nach der Zeit verwendet man statt $N'(t)$ auch oft die Bezeichnung $\dot{N}(t)$. □

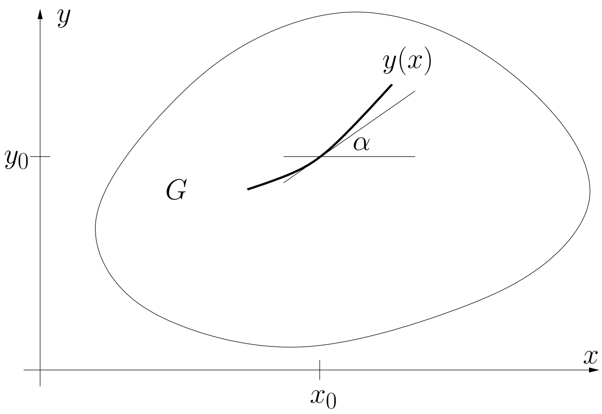

Abbildung 6.2: Skizze zur geometrischen Interpretation.

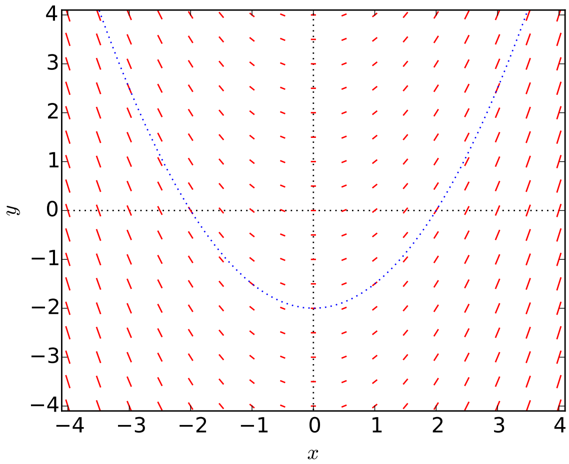

Abbildung 6.3: Beispiel 6.8. Richtungsfeld der Lösung.

Bemerkung 6.7 *Geometrische Interpretation.* Die explizite Differentialgleichung (6.3) gestattet eine einfache geometrische Interpretation. Geht eine Lösung $y(x)$ von (6.3) durch den Punkt $(x_0, y_0) \in G$, das heißt $y(x_0) = y_0$, so beträgt ihre Steigung an dieser Stelle

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan\alpha,$$

wobei α der Anstiegswinkel ist, siehe Abbildung 6.2.

Man nennt das Tripel $(x_0, y_0, \tan\alpha) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, oder sein geometrisches Äquivalent, Linienelement. Die Gesamtheit aller Linienelemente $(x, y, f(x, y))$ heißt Richtungsfeld. Eine Kurve $y(x)$ erweist sich als Lösung der Differentialgleichung (6.3), wenn sie in das vorgegebene Richtungsfeld passt. Das heißt, in jedem Kurvenpunkt stimmt ihre Tangentenrichtung mit der Richtung des Linienelements überein. □

Beispiel 6.8 *Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung.* Gesucht sei die Lösung von

$$y'(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist $f(x, y) = x$. Diese Funktion ist für konstantes x konstant. Das Richtungsfeld ist in Abbildung 6.3 skizziert.

Die Gesamtheit aller Lösungen einer Differentialgleichung nennt man allgemeine Lösung. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man sieht an diesem Beispiel, dass diese Differentialgleichung zum einen unendlich viele Lösungen besitzt. Zum anderen gibt es für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung, die diesen Punkt enthält.

In der Praxis ist es oft nicht so wichtig, alle Lösungen zu kennen, sondern eine Lösung zu finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft. □

Definition 6.9 Anfangswertproblem, Anfangswert. Gegeben sind eine auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ erklärte Funktion $f(x, y)$ und ein fester Punkt $(x_0, y_0) \in G$. Dann nennt man das Problem

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right), \quad y\left(x_0\right) = y_0$$

Anfangswertproblem (AWP). Die Nebenbedingung wird Anfangswert genannt. □

6.2.2 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Definition 6.10 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{6.5}$$

nennt man gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen. □

Beispiel 6.11 *Unbestimmtes Integral.* Ein Spezialfall von (6.5) ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x).$$

Der Lösungsweg für diese Differentialgleichung ist bereits aus der Schule bekannt: unbestimmte Integration. Existiert eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = F(x) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Man spricht anstelle des „Auffindens der Lösung einer Differentialgleichung“ auch oft von der „Integration einer Differentialgleichung“. □

Satz 6.12 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. *Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $g(y)$ sei im Intervall $(c, d) \subset \mathbb{R}$ stetig und es gelte $g(y) \neq 0$ für alle $y \in (c, d)$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b),\ y_0 \in (c, d), \tag{6.6}$$

eindeutig lösbar. Seien $G(y)$ die Stammfunktion von $1/g(y)$ mit $G(y_0) = 0$ und $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ mit $F(x_0) = 0$. Dann ist

$$y(x) = \left(G^{-1} \circ F\right)(x) = G^{-1}(F(x)) \tag{6.7}$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems in einer Umgebung von x_0. Hierbei ist $G^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von $G(y)$.

Beweis: Für Interessenten.

i) Eindeutigkeit. Angenommen, $y(x)$ sei eine Lösung des AWP (6.6) mit $y(x_0) = y_0$. Dann gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Da beide Funktionen dieser Gleichung stetig sind, kann man sie integrieren

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))}\ \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Da $G(y)$ die Stammfunktion von $1/g(y)$ ist und $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$, erhält man mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$G(y(x)) - \underbrace{G(\underbrace{y(x_0)}_{=y_0})}_{=0} = F(x) - \underbrace{F(x_0)}_{=0}. \tag{6.8}$$

Da $1/g(y) \neq 0$ ist, ist $G(y)$ eine streng monotone Funktion. Daraus folgt, dass die Umkehrfunktion $G^{-1}(y)$ existiert. Damit ergibt sich aus (6.8)

$$y(x) = \left(G^{-1} \circ F\right)(x) = G^{-1}(F(x)).$$

Das heißt, existiert eine Lösung des AWP (6.6), so kann man sie in der Form (6.7) darstellen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Funktionen $F(x)$ und $G(y)$.

ii) Existenz. Man zeigt durch nachrechnen, dass (6.7) eine Lösung des AWP (6.6) ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
y'(x) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(G^{-1}\right)'(F(x))\,F'(x) \\
&\overset{\text{Abl.Umkehrfunktion}}{=} \frac{1}{G'\left(G^{-1}(F(x))\right)}F'(x) \\
&\overset{(6.7)}{=} \frac{1}{G'(y(x))}F'(x) \\
&\overset{G'(y)=1/g(y)}{=} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(y)}} = f(x)g(y).
\end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

■

Beispiel 6.13 *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.* Betrachte

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{x}{y(x)}, \quad x \in (a,b),\ y \in (c,d),\ 0 \notin (c,d) \\
y(x_0) &= y_0 \in (c,d).
\end{aligned}$$

Mit der obigen Herangehensweise erhält man

$$f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} t \ \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

und

$$g(y) = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} = y \quad \Longrightarrow \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} t \ \mathrm{d}t = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}.$$

Nach (6.8), oder (6.7) durch Anwendung von G auf beide Seiten, folgt

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}. \tag{6.9}$$

Durch Umstellen erhält man die Lösung

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } c > 0, \\
y &= -\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } d < 0.
\end{aligned}$$

Die Wahl von x kann in Abhängigkeit von (x_0, y_0) eingeschränkt sein. Nach (6.9) kann man die Lösung auch in der Form

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2 =: c_0$$

schreiben. Dies ist eine Hyperbel. Sei $c_0 > 0$, dann hat man für $c > 0$ einen oberen Ast, siehe Abbildung 6.4, und für $d < 0$ einen unteren Ast.

Für $c_0 < 0$ besteht die Lösung aus je einem Teil des linken beziehungsweise des rechten Astes einer Hyperbel. Im Fall $c_0 = 0$ ist die Lösung $y = |x|$ oder $y = -|x|$, jeweils mit $x \neq 0$. □

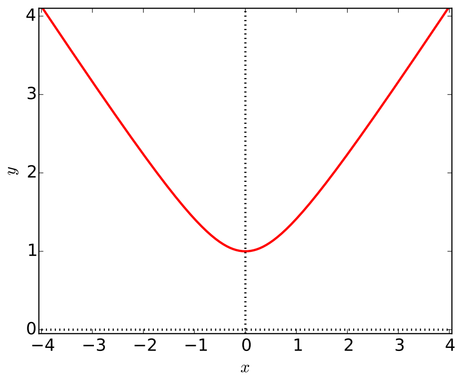

Abbildung 6.4: Beispiel 6.13, oberer Hyperbelast, Lösung im Fall $c > 0$, $c_0 = 1$.

Bemerkung 6.14 *Methode der Trennung der Variablen.* Man braucht sich die Lösungsformel für das Anfangswertproblem (6.6) nicht zu merken, da es einen einfachen, wenngleich mathematisch nicht ganz exakten, Weg zur Berechnung der Lösung gibt – die Methode der Trennung der Variablen:

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & f(x)g(y) & \text{behandle linke Seite wie einen Bruch} \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} & = & f(x)\mathrm{d}x & \text{integriere unbestimmt} \\[2ex]
\displaystyle\int \dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} & = & \int f(x)\ \mathrm{d}x & \text{finde Stammfunktionen} \\[2ex]
G(y) & = & F(x) + c & \text{fasse Integrationskonstanten zusammen} \\
y & = & G^{-1}\left(F(x) + c\right) & \text{löse nach } y \text{ auf.}
\end{array}
$$

Die Konstante c wird zum Schluss aus der Anfangsbedingung bestimmt. □

Beispiel 6.15 *Methode der Trennung der Variablen.* Betrachte die Methode der Trennung der Variablen in Beispiel 6.13. Man hat

$$
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} & = & \dfrac{x}{y} \quad \Longrightarrow \\[2ex]
y\mathrm{d}y & = & x\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \\[1ex]
\displaystyle\int y\ \mathrm{d}y & = & \displaystyle\int x\ \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \\[2ex]
\dfrac{y^2}{2} & = & \dfrac{x^2}{2} + c.
\end{array}
$$

Nun hat man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Anfangsbedingung ergibt

$$
\frac{y_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2}\left(y_0^2 - x_0^2\right).
$$

□

Bemerkung 6.16 *Der Fall, dass $g(y)$ eine Nullstelle besitzt.* Sei $y_1 \in (c, d)$ mit $g(y_1) = 0$. Dann ist eine Lösung des AWP (6.6) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_1$ sofort durch $y(x) = y_1$ für alle $x \in (a, b)$ gegeben, da dann $g(y) = g(y_1) = 0$ und beide Seiten der Differentialgleichung von (6.6) gleich Null sind. Es kann jedoch passieren, dass es weitere Lösungen dieses AWPs gibt, siehe Übungsaufgaben. □