

# Kapitel 5

## Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

### 5.1 Einführung

**Bemerkung 5.1** *Aufgabenstellung.* Diese Kapitel behandelt numerische Verfahren zur Lösung des Eigenwertproblems. Gegeben sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , bestimme  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ , so dass

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (5.1)$$

gilt. Hierbei heißt  $\lambda$  Eigenwert und  $\mathbf{v}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

In der Vorlesung wird vor allem der Fall betrachtet, dass  $A$  eine symmetrische Matrix ist. Dann sind alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren reell.  $\square$

**Beispiel 5.2** *Spektralnorm und Spektralkondition einer symmetrischen Matrix.* Für eine symmetrische invertierbare Matrix  $A$  gelten  $\|A\|_2 = |\lambda_{\max}(A)|$  und  $\|A^{-1}\|_2 = |\lambda_{\min}(A)|^{-1}$ . Damit muss man für die Berechnung der Spektralnorm von  $A$  den betragsmäßig größten Eigenwert bestimmen und zur Berechnung der Spektralkondition  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$  noch zusätzlich den betragsmäßig kleinsten Eigenwert. Es ist jedoch nicht nötig, alle Eigenwerte zu berechnen.  $\square$

**Beispiel 5.3** *Modellierung von Schwingungsabläufen, Sturm<sup>1</sup>–Liouville<sup>2</sup>-Problem.* Die mathematische Modellierung zur Beschreibung der Überlagerung von Schwingungsvorgängen kann durch das sogenannte Sturm–Liouville-Problem

$$u''(x) + \lambda r(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad (5.2)$$

mit den Randbedingungen  $u(0) = u(1) = 0$  erfolgen. In (5.2) ist die Funktion  $r \in C([0, 1])$  mit  $r(x) > 0$  gegeben und die Funktionen  $u(x)$  sowie die Zahlen  $\lambda$  sind gesucht. Die Funktion  $r(x)$  beschreibt Eigenschaften des Materials im Punkt  $x$ . Es handelt sich um ein Eigenwertproblem für ein Randwertproblem mit gewöhnlicher Differentialgleichung. Dies ist die eindimensionale Version von Modellen, wie man sie etwa beim Brückenbau verwendet, um Resonanzen zu vermeiden, die einen Brückeneinsturz verursachen könnten. Die Randbedingungen besagen, dass die Brücke an beiden Enden fest ist.

Im Fall  $r(x) \equiv 1$  rechnet man direkt nach, dass  $\lambda = (k\pi)^2$  und  $u(x) = \sin(k\pi x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  Lösungen von (5.2) sind. Es gibt also unendliche viele Paare, welche das Eigen-Randwertproblem erfüllen.

Ist  $r(x)$  nicht konstant, dann gibt es aber im Allgemeinen keine geschlossene Formel, um die Lösungen darzustellen. Man muss die Lösungen numerisch approximieren. Dazu kann man  $[0, 1]$  in ein äquidistantes Gitter mit  $n$  Intervallen und der Schrittweite  $h = 1/n$  zerlegen. Nun werden die Funktionen  $r(x)$  und  $u(x)$  in (5.2) in den Gitterpunkten  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , betrachtet und die zweite Ableitung in den inneren Gitterpunkten wird durch einen Differenzenquotienten approximiert, siehe später in Abschnitt 7.4,

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n - 1. \quad (5.3)$$

---

<sup>1</sup> Jacques Charles Francois Sturm (1803 – 1855)

<sup>2</sup> Joseph Liouville (1809 – 1882)

Mit Taylor-Entwicklung kann man nachrechnen, dass diese Approximation genau bis auf Terme der Ordnung  $h^2$  ist, wenn  $u(x)$  glatt genug ist, vergleiche Beispiel 7.47. In den Randpunkten braucht man die zweite Ableitung nicht, da dort die Lösung gegeben ist.

Bezeichne  $u_i$  die approximierte Lösung im Gitterpunkt  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Dann wird in der Praxis in (5.3)  $u(x_i)$  durch  $u_i$  usw. ersetzt. Einsetzen der Approximationen in (5.2) ergibt für die Knoten

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \lambda r(x_i)u_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ u_n &= 0. \end{aligned}$$

Die Randwerte kann man in die Gleichung für  $i = 1$  beziehungsweise  $i = n-1$  einsetzen und man erhält letztlich ein Gleichungssystem mit  $(n-1)$  Gleichungen für die  $(n-1)$  Unbekannten  $\mathbf{u}^T = (u_1, \dots, u_{n-1})$  der Gestalt

$$-B\mathbf{u} + \lambda D\mathbf{u} = 0$$

mit

$$B = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 2 & \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} r(x_1) & & & & & \\ & r(x_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & r(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Da nach Voraussetzung  $r(x_i) > 0$  für alle  $i$  ist, kann man

$$D^{1/2} = \text{diag} \left( \sqrt{r(x_1)}, \dots, \sqrt{r(x_{n-1})} \right)$$

bilden. Damit erhält man

$$B\mathbf{u} = \lambda D\mathbf{u} = \lambda D^{1/2}D^{1/2}\mathbf{u} \iff D^{-1/2}B\mathbf{u} = \lambda D^{1/2}\mathbf{u}.$$

Setzt man  $\mathbf{v} = D^{1/2}\mathbf{u}$ , so ergibt sich ein Eigenwertproblem der Gestalt (5.1)

$$A\mathbf{v} = D^{-1/2}BD^{-1/2}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Da  $A$  symmetrisch

$$A^T = \left( D^{-1/2}BD^{-1/2} \right)^T = D^{-T/2}B^TD^{-T/2} = D^{-1/2}BD^{-1/2} = A$$

und positiv definit ist, sind alle Eigenwerte reell und positiv.

In dieser Aufgabe sind alle Eigenwerte und alle Eigenfunktionen gesucht. Man kann jedoch nur  $n-1$  der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Randwertproblems numerisch approximieren.  $\square$

## 5.2 Zur Theorie des Eigenwertproblems

**Bemerkung 5.4** *Inhalt.* Dieser Abschnitt stellt einige Aussagen zur Theorie des Eigenwertproblems (5.1) zusammen, die zum Teil schon aus der linearen Algebra bekannt sind.  $\square$

**Bemerkung 5.5** *Das charakteristische Polynom.* Die Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist genau dann Eigenwert von  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , wenn

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Man nennt  $p(\lambda) \in P_n$  das charakteristische Polynom der Matrix  $A$ . Seine Nullstellen sind die Eigenwerte von  $A$ . Da die Nullstellenberechnung eines Polynoms ein nichtlineares Problem ist, folgt, dass auch das Eigenwertproblem nichtlinear ist. Es ist insbesondere deutlich komplexer als die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Die Verwendung des charakteristischen Polynoms zur Berechnung der Eigenwerte von  $A$  besitzt jedoch in der Praxis entscheidende Nachteile. Zuerst müssen die Koeffizienten des Polynoms berechnet werden. Das ist für große  $n$  aufwändig. Des Weiteren hängen die Nullstellen oft sensibel von den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ab. Das Problem ist also schlecht konditioniert, insbesondere wenn die Matrix mehrfache Eigenwerte besitzt. Insgesamt ist das charakteristische Polynom zur numerischen Approximation von Eigenwerten einer Matrix nicht brauchbar (Übungsaufgabe).  $\square$

**Bemerkung 5.6** Weitere bekannte Aussagen, Begriffe.

- Das charakteristische Polynom  $p(\lambda)$  besitzt nach dem Fundamentalsatz der Algebra genau  $n$  (mit entsprechender Vielfachheit gezählte) reelle oder komplexe Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .
- Der Eigenwert  $\lambda_i$  heißt einfacher Eigenwert, wenn die entsprechende Nullstelle des charakteristischen Polynoms einfach ist.
- Die Menge aller Eigenwerte von  $A$

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

heißt Spektrum von  $A$ .

- Zwei Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißen ähnlich (über dem Körper der reellen Zahlen), wenn es eine invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt mit der Eigenschaft

$$B = T^{-1}AT.$$

Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche Spektrum

$$\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$$

für eine beliebige invertierbare Matrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da sie dasselbe charakteristische Polynom besitzen

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(T) = \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

- Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt diagonalisierbar, wenn  $A$  zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist. Die Matrix  $A$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren hat. Die Eigenvektoren sind gerade die Spalten der entsprechenden Matrix  $T$ .
- Besitzt  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$   $n$  verschiedene Eigenwerte, so ist  $A$  diagonalisierbar.

$\square$

**Lemma 5.7 Reelle Schur<sup>3</sup>-Faktorisierungen.** Zu jeder Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt es eine orthogonale Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} R_{11} & & & \\ & \ddots & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_{mm} \end{pmatrix} = R \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (5.4)$$

Dabei ist für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $m \leq n$ , entweder  $R_{ii} \in \mathbb{R}$  oder  $R_{ii} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Im letzteren Fall hat  $R_{ii}$  ein Paar von konjugiert komplexen Eigenwerten. Die Menge aller Eigenwerte der  $R_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , bilden das Spektrum von  $A$ . Die Zerlegung ist nicht eindeutig.

**Beweis:** Für einen Beweis sei auf die Literatur verwiesen, zum Beispiel (Golub & Van Loan, 1996, S. 341).  $\blacksquare$

---

<sup>3</sup>Issai Schur (1875 – 1941)

**Folgerung 5.8 Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen.** *Jede symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lässt sich mittels einer orthogonalen Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt bringen*

$$R = Q^{-1}AQ = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Die Matrix  $A$  besitzt somit nur reelle Eigenwerte und  $n$  linear unabhängige, zueinander orthogonale Eigenvektoren, nämlich die Spalten von  $Q$ .

**Beweis:** Die Symmetrie von  $R$  folgt direkt aus (5.4) und der Symmetrie von  $A$

$$R^T = (Q^{-1}AQ)^T = Q^T A^T Q^{-T} = Q^{-1}AQ = R.$$

Auf Grund der Symmetrie von  $R$  muss der mit  $*$  markierte Block in (5.4) ein Nullblock sein, so dass

$$R = \text{diag}(R_{11}, \dots, R_{mm}).$$

Es können nun noch symmetrische  $2 \times 2$  Blöcke  $R_{ii}$  auftreten. Man rechnet aber direkt nach, dass symmetrische  $2 \times 2$  Matrizen mit nichtverschwindenden Nebendiagonalelementen immer zwei unterschiedliche reelle Eigenwerte besitzen, da die Diskriminante des charakteristischen Polynoms positiv ist (Übungsaufgabe). Somit widerspricht das Auftreten von symmetrischen  $2 \times 2$  Blöcken den Aussagen von Lemma 5.7 und  $R$  muss eine Diagonalmatrix sein.  $\blacksquare$

### 5.3 Kondition des Eigenwertproblems

**Bemerkung 5.9 Inhalt.** In diesem Abschnitt wird untersucht, wie stark sich Eigenwerte und Eigenvektoren bei Störungen der Koeffizienten von  $A$  verändern.  $\square$

**Satz 5.10 Einfluss von Störungen auf die Eigenwerte.** *Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonalisierbar, das heißt es existiert eine Matrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit*

$$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Sei  $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Störung von  $A$  und sei  $\mu$  ein Eigenwert der gestörten Matrix  $A + \Delta A$ . Dann gilt

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu| \leq \|T\|_p \|T^{-1}\|_p \|\Delta A\|_p \quad (5.5)$$

für alle  $p \in [1, \infty]$ .

**Beweis:** Auch hier sei für den Beweis wieder auf die Literatur, zum Beispiel Golub & Van Loan (1996) oder Stoer & Bulirsch (2005).  $\blacksquare$

**Bemerkung 5.11 Interpretation von Satz 5.10.** Die absolute Kondition des Eigenwertproblems

$$\sup_{\Delta A} \frac{\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - \mu|}{\|\Delta A\|_p}$$

hängt von  $\kappa_p(T) = \|T\|_p \|T^{-1}\|_p$  und nicht von  $\kappa_p(A)$  ab. Da die Spalten von  $T$  gerade die Eigenvektoren von  $A$  sind, bedeutet (5.5) gerade, dass für eine diagonalisierbare Matrix die Kondition der Eigenvektorbasis eine große Rolle bei der Empfindlichkeit der Eigenwerte von  $A$  bezüglich Störungen spielt.  $\square$

**Beispiel 5.12 Kondition eines Eigenwertproblems.** Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die gestörte Matrix

$$A + \Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Delta A)^T \Delta A = \begin{pmatrix} \delta^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$