

Kapitel 3

Interpolation

3.1 Einführung

Bemerkung 3.1 *Motivation, Aufgabenstellung.* Gegeben seien eine Funktion $f \in C([a, b])$ und $x_i \in [a, b]$, $i = 0, \dots, n$, mit

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b. \quad (3.1)$$

Die Interpolationsaufgabe besteht darin, eine (einfache) Funktion $u_n \in U_n$ zu finden, so dass

$$u_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.2)$$

ist. Dabei ist $\{U_n \subset C([a, b])\}$ eine Folge von Räumen.

Natürlich gibt es unendlich viele Funktionen, welche die Interpolationsaufgabe erfüllen. Deshalb muss man die Klasse der Funktionen festlegen, in der man die Interpolierende $u_n(x)$ sucht. Man unterscheidet zum Beispiel:

- $u_n(x)$ ist ein Polynom – Polynominterpolation,
- $u_n(x) = a_0 + a_1 e^{ix} + \dots + a_n e^{inx}$ – trigonometrische Interpolation ($i = \sqrt{-1}$),
- $u_n(x)$ ist stückweise ein Polynom – Spline-Interpolation,
- $u_n(x)$ ist eine rationale Funktion – rationale Interpolation.

In diesem Kapitel wird auf die Interpolation mit Polynomen und mit Splines eingegangen. $\square$

Definition 3.2 Stützstellen, Knoten, Stützwerte. Man bezeichnet $\{x_i\}$ als die Menge der Stützstellen oder Knoten und die Menge $\{f(x_i)\}$ als die Menge der Stützwerte. Man sagt, dass die Funktion $u_n(x)$ die Stützwerte $\{f(x_i)\}$ an den Stützstellen $\{x_i\}$ interpoliert. $\square$

Bemerkung 3.3 Wichtige Fragestellungen. Natürlich sind die Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (3.2) von Bedeutung.

Die Interpolationsaufgabe (3.2) ist auch eine Art Bestapproximations-Aufgabe, nämlich gerade für die Wahl der Stützstellen $\{x_i\}_{i=0}^n$.

Weiterhin ist es wichtig zu wissen, wie sich die Interpolierende $u_n(x)$ und die interpolierte Funktion $f(x)$ in den Intervallen zwischen den Stützstellen unterscheiden, zum Beispiel ob

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - u_n\|_\infty = 0. \quad (3.3)$$

Falls dies der Fall ist, interessiert man sich auch für die Konvergenzgeschwindigkeit. Dazu versucht man Fehlerabschätzungen der Gestalt

$$\|f - u_n\|_\infty \leq C n^{-q} \quad (3.4)$$

mit einer von f und n unabhängigen Konstanten $C > 0$ und einer möglichst großen positiven Konstanten q zu beweisen. Hat man eine Abschätzung der Gestalt (3.4) bewiesen, so erhält man damit auch eine Abschätzung für die L^2 -Norm

$$\|f - u_n\|_{L^2} = \left(\int_a^b (f - u_n)^2(x) \, dx \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|f - u_n\|_\infty \left(\int_a^b dx \right)^{1/2} \\
&= \sqrt{b-a} \|f - u_n\|_\infty \\
&\leq C n^{-q},
\end{aligned}$$

wobei C jetzt eine andere Konstante bezeichnet. Eine Umkehrung dieser Vorgehensweise gilt nicht. Aus dem Fehler in der L^2 -Norm kann man nicht auf den Fehler in der Maximumsnorm schließen.

Für die Praxis sind schließlich auch effiziente und robuste Verfahren zur Berechnung der Interpolierenden wichtig. $\square$

3.2 Polynominterpolation

3.2.1 Wiederholung

Bemerkung 3.4 Aufgabenstellung. Sei $U_n = P_n$. Die allgemeine Interpolations-Aufgabe (3.2) hat in diesem Fall die Gestalt: Finde $u_n = p_n \in P_n$, so dass

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.5)$$

unter der Voraussetzung (3.1).

Diese Aufgabe wurde bereits in CoMa II untersucht unter der Voraussetzung, dass die Stützstellen bereits festgelegt waren, insbesondere mit $x_0 = a$ und $x_n = b$. Die gewonnenen Ergebnisse werden hier zusammengefasst. $\square$

Definition 3.5 Dividierte Differenz. Seien $(x_i, f(x_i)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, wobei die Stützstellen paarweise verschieden sind. Die k -te dividierte Differenz

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$$

wird rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i) \quad \text{für } i = 0, \dots, n, \\
f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.
\end{aligned}$$

$\square$

Satz 3.6 Zur Polynominterpolation. Die Interpolations-Aufgabe (3.5) besitzt eine eindeutige Lösung. Diese hat die Lagrange¹-Darstellung

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n L_k(x) f(x_k), \quad (3.6)$$

wobei $L_k(x)$ das Lagrange-Polynom

$$L_k(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (3.7)$$

ist. Die Newton²-sche Darstellung des Interpolationspolynoms lautet

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n \omega_k(x) f[x_0, x_1, \dots, x_k] \quad \text{mit} \quad \omega_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j). \quad (3.8)$$

¹Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

²Isaac Newton (1642 – 1727)

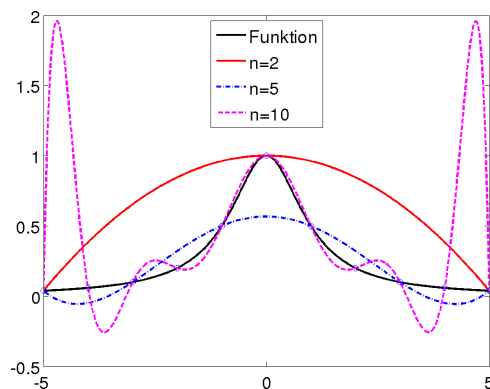


Abbildung 3.1: Beispiel 3.9, Interpolationspolynome für $n \in \{2, 5, 10\}$, äquidistante Stützstellen.

Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$. Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi(x) \in (a, b)$, so dass für den Fehler

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad (3.9)$$

gilt. Daraus folgt

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty \|\omega_{n+1}\|_\infty. \quad (3.10)$$

Bemerkung 3.7 *Interpretation der Aussage des Satzes.* Die Aussage von Satz 3.6 impliziert nicht, dass (3.3) gilt. Man kann Funktionen und zugehörige Mengen von Stützstellen so finden, zum Beispiel mit gleichem Abstand, dass es Teilintervalle von $[a, b]$ gibt, in denen $p_n(x) \not\rightarrow f(x)$ für alle Argumente x aus diesen Teilintervallen. $\square$

Bemerkung 3.8 *Lagrange-Polynome als Basis des P_n .* Die Aussage des Satzes gilt insbesondere für $f \in P_n$. Somit kann man jedes Polynom aus P_n mit Hilfe der Lagrange-Polynome eindeutig darstellen, woraus folgt, dass die Menge der Lagrange-Polynome eine Basis des P_n bildet. $\square$

Beispiel 3.9 *Beispiel von Runge*³. Betrachte $f : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/(1+x^2)$. Es gilt $f \in C^\infty([-5, 5])$. Bei der Nutzung äquidistanter Stützstellen, unter Einbeziehung der Randpunkte, erhält man die in Abbildung 3.1 zu sehenden Interpolationspolynome für $n \in \{2, 5, 10\}$. Man sieht, dass insbesondere die Interpolationspolynome höheren Grades zum Rand hin stark von der zu interpolierenden Funktion abweichen. Die Interpolationsfehler in $\|\cdot\|_\infty$ werden immer größer. $\square$

3.2.2 Hermite-Interpolation

Bemerkung 3.10 *Aufgabenstellung.* Die Interpolationsaufgabe (3.5) kann man dahingehend verallgemeinern, dass man nicht nur Funktionswerte vorgibt, sondern auch Werte von Ableitungen. Diese Aufgabe nennt man Hermite⁴-Interpolation. Seien Paare $(x_i, f^{(k)}(x_i))$ mit $i = 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$, gegeben, wobei die Bedingung (3.1) an das Gitter erfüllt sei. Setze $N = \sum_{i=0}^n (m_i + 1)$, die Anzahl der gegebenen Daten. Die Aufgabe der Hermite-Interpolation lautet: Finde $p_{N-1} \in P_{N-1}$, so dass

$$p_{N-1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \quad k = 0, \dots, m_i. \quad (3.11)$$

In diesem Abschnitt wird im Wesentlichen ein Spezialfall der Hermite-Interpolation betrachtet. Für den allgemeinen Fall, sei auf die Literatur verwiesen. $\square$

³Carl David Tolmé Runge (1856 – 1927)

⁴Charles Hermite (1822 – 1901)

Bemerkung 3.11 *Zusammenhang mit Taylor⁵scher Formel.* Seien $f \in C^{m+1}([a, b])$ und $x_0 \in (a, b)$. Dann besitzt die Taylorsche Formel mit dem Restglied von Lagrange die Gestalt

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}$$

mit $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in (0, 1)$. Das Taylor-Polynom

$$p_n = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

löst offenbar die Hermite-Interpolationsaufgabe für $n = 0$ (nur ein Knoten) und $m_0 = m$ (alle Ableitungen bis zum Grad m in diesem Knoten). Die Gestalt des Fehlers

$$\frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - x_0)^{m+1}$$

erinnert an den Fehler (3.9) der Polynominterpolation ohne Ableitungen. $\square$

Bemerkung 3.12 *Spezielle Hermite-Interpolationsaufgabe.* In der Vorlesung wird sich auf folgenden Spezialfall beschränkt. Sei $f \in C^1([a, b])$ und seien die Bedingungen

$$f(x_i) = f_i \quad f'(x_i) = f'_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.12)$$

gegeben. Das sind $(2n + 2)$ Bedingungen. Gesucht ist also ein Polynom $p \in P_{2n+1}$, welches die Bedingungen (3.12) erfüllt. $\square$

Beispiel 3.13 *Zur speziellen Hermite-Interpolationsaufgabe.* Gesucht ist das Polynom $p_3(x)$ dritten Grades, welches durch die Bedingungen

$$p_3(-1) = 1, \quad p'_3(-1) = 2, \quad p_3(1) = 3, \quad p'_3(1) = 4,$$

bestimmt ist. Mit dem Ansatz

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad \implies \quad p'_3(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dieses System kann man durch geschicktes Addieren und Subtrahieren von Zeilen lösen. Man erhält

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das gesuchte Polynom besitzt also die Gestalt $p_3(x) = 3/2 + 1/2x^2 + x^3$. $\square$

Satz 3.14 Existenz und Eindeutigkeit des Hermite-Interpolationspolynoms zur Aufgabe (3.12). *Das Hermite-Interpolationspolynom $p \in P_{2n+1}$ zur Aufgabe (3.12) existiert und es ist eindeutig bestimmt.*

⁵ Brook Taylor (1685 – 1731)

Beweis: *Existenz.* Ein Hermite-Interpolationspolynom wird konstruiert. Dazu verwendet man den Ansatz

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i \varphi_i(x) + \sum_{i=0}^n f'_i \psi_i(x) \quad (3.13)$$

mit $\varphi_i, \psi_i \in P_{2n+1}$, $i = 0, \dots, n$. Diese Polynome sollen folgende Bedingungen erfüllen

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_j) &= \delta_{ij}, & \varphi'_i(x_j) &= 0, \\ \psi_i(x_j) &= 0, & \psi'_i(x_j) &= \delta_{ij}, \end{aligned} \quad i, j = 0, \dots, n. \quad (3.14)$$

Findet man solche Polynome, dann löst das Polynom (3.13) die Hermite-Interpolationsaufgabe (3.12).

Setze

$$\varphi_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)) L_i^2(x), \quad (3.15)$$

$$\psi_i(x) = (x - x_i) L_i^2(x), \quad (3.16)$$

wobei $L_i(x)$ das in (3.7) definierte Lagrange-Polynom ist. Es gelten, wegen $L_i(x_j) = \delta_{ij}$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_i) &= L_i^2(x_i) = 1, \\ \varphi_i(x_j) &= (1 - 2L'_i(x_j)(x_j - x_i)) L_i^2(x_j) = 0, \\ \psi_i(x_i) &= (x_i - x_i) L_i^2(x_i) = 0, \\ \psi_i(x_j) &= (x_j - x_i) L_i^2(x_j) = 0, \\ \varphi'_i(x_i) &= -2L'_i(x_i) L_i^2(x_i) + 2L'_i(x_i) L_i(x_i) = -2L'_i(x_i) + 2L'_i(x_i) = 0, \\ \varphi'_i(x_j) &= -2L'_i(x_i) L_i^2(x_j) + 2(1 - 2L'_i(x_i)(x_j - x_i)) L'_i(x_j) L_i(x_j) = 0, \\ \psi'_i(x_i) &= L_i^2(x_i) + 2(x_i - x_i) L_i(x_i) L'_i(x_i) = L_i^2(x_i) = 1, \\ \psi'_i(x_j) &= L_i^2(x_j) + 2(x_j - x_i) L_i(x_j) L'_i(x_j) = 0. \end{aligned}$$

Damit erfüllt p aus (3.13) mit (3.15), (3.16) die Hermite-Interpolationsaufgabe (3.12).

Eindeutigkeit. Angenommen, es gibt ein weiteres Polynom $\tilde{p} \in P_{2n+1}$, welches die Hermite-Interpolationsaufgabe (3.12) löst. Dann gilt $p - \tilde{p} \in P_{2n+1}$ und $p - \tilde{p}$ besitzt die $(n+1)$ doppelten Nullstellen $x_0, \dots, x_n$, da in diesen Punkten sowohl die Funktionswerte als auch die ersten Ableitungen gleich Null sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muss dann aber $p - \tilde{p} \equiv 0$ gelten. ■

Satz 3.15 Interpolationsfehler in Aufgabe (3.12). Sei $f \in C^{2n+2}([a, b])$, sei (3.1) erfüllt und sei p das Hermite-Interpolationspolynom (3.13) mit (3.15), (3.16). Dann gibt es zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x) \quad (3.17)$$

mit $\omega_{n+1}(x)$ aus (3.8).

Beweis: Für $x = x_i$ sind der Fehler und die rechte Seite von (3.17) beide Null.

Sei $x \in (a, b)$, $x \neq x_i$ für alle i , beliebig aber fest. Betrachte die Funktion

$$h(z) = (f(x) - p(x)) \omega_{n+1}^2(z) - (f(z) - p(z)) \omega_{n+1}^2(x).$$

Dann zeigt man zuerst, dass $h(z)$ in $z = x_i$ eine doppelte Nullstelle besitzt. Es gilt nämlich $\omega_{n+1}(x_i) = 0$ und dieser Faktor kommt im ersten Term quadratisch vor. Im zweiten Term besitzt der Faktor $f(z) - p(z)$ eine doppelte Nullstelle, da $f(x_i) = p(x_i)$ und $f'(x_i) = p'(x_i)$. Des Weiteren besitzt $h(z)$ für $z = x$ eine weitere Nullstelle, weil sich dann beide Terme aufheben. Insgesamt besitzt $h(z)$, wenn man die Vielfachheit mitzählt, $2n+3$ Nullstellen, von denen $n+2$ paarweise verschieden und $n+1$ doppelt sind.

Betrachte

$$h'(z) = 2(f(x) - p(x)) \omega'_{n+1}(z) \omega_{n+1}(z) - (f'(z) - p'(z)) \omega_{n+1}^2(x).$$

Nach dem Satz von Rolle⁶, angewandt auf $h(z)$, besitzt $h'(z)$ $(n+1)$ Nullstellen, die nicht x_i oder x sind. Da die Nullstellen von $h(z)$ in x_i doppelt sind, besitzt $h'(z)$ ebenfalls Nullstellen in x_i , $i = 0, \dots, n$. Insgesamt besitzt $h'(z)$ also $2n+2$ paarweise verschiedene Nullstellen. Fortgesetzte Anwendung des Satzes von Rolle liefert, dass $h^{(2n+2)}$ eine Nullstelle $\xi \in (a, b)$ besitzt.

⁶Michel Rolle (1652 – 1719)

Es ist p ein Polynom vom Grad $(2n+1)$, so dass dessen $(2n+2)$ -te Ableitung verschwindet. Außerdem ist ω_{n+1} ein Polynom vom Grad $n+1$ mit dem Faktor Eins vor der höchsten Potenz, also ω_{n+1}^2 ein Polynom vom Grad $2n+2$ mit dem Faktor Eins vor der höchsten Potenz. Deshalb gilt

$$h^{(2n+2)}(z) = (2n+2)!(f(x) - p(x)) - f^{(2n+2)}(z)\omega_{n+1}^2(x).$$

Nun folgt für $z = \xi$, $h^{(2n+2)}(\xi) = 0$ und Umstellen die Behauptung (3.17). ■

3.2.3 Zusammenhang zwischen Interpolations- und Bestapproximationsfehler

Bemerkung 3.16 Ziel. Die Bestapproximation und die Interpolation durch gegebene Stützstellen sind zwei Möglichkeiten, eine Funktion durch eine einfachere Funktion zu approximieren. In diesem Abschnitt werden diese beiden Möglichkeiten miteinander verglichen. □

Satz 3.17 Kondition der Polynominterpolation. *Der Interpolationsoperator*

$$\phi : C([a, b]) \rightarrow P_n, \quad f \mapsto \phi(f) = p_n,$$

ist eine Projektion. Das heißt, ϕ ist linear und es gilt $\phi^2 = \phi$. Für die Kondition der Polynominterpolation gilt

$$\|\phi\|_\infty = \sup_{f \in C([a, b])} \frac{\|\phi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n \quad (3.18)$$

mit der Lebesgue-Konstanten

$$\Lambda_n = \left\| \sum_{k=0}^n |L_k| \right\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \sum_{k=0}^n |L_k| \quad (3.19)$$

mit $L_k(x)$ definiert in (3.7).

Beweis: Dieses Resultat findet man im CoMa-II-Skript. ■

Satz 3.18 Zusammenhang zwischen Interpolations- und Bestapproximationsfehler. *Sei $f \in C([a, b])$ und sei $\hat{p}_n \in P_n$ die Lösung der Tschebyscheffschen Bestapproximations-Aufgabe (1.15) mit dem Approximationsfehler*

$$E_n(f) = \|f - \hat{p}_n\|_\infty.$$

Sei $p_n \in P_n$ die Lösung der Interpolationsaufgabe (3.5). Dann gilt

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)E_n(f) \quad \forall f \in C([a, b]) \quad (3.20)$$

mit Λ_n definiert in (3.19).

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Anwendung der Dreiecksungleichung, Nutzung der Eigenschaften von ϕ , die Definition einer Operatornorm (3.18) und Nutzung der Definition der Lebesgue-Konstanten

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &\leq \|f - \hat{p}_n\|_\infty + \|\hat{p}_n - p_n\|_\infty = \|f - \hat{p}_n\|_\infty + \|\hat{p}_n - \phi(f)\|_\infty \\ &= \|f - \hat{p}_n\|_\infty + \|\phi(\hat{p}_n - f)\|_\infty \\ &\leq \|f - \hat{p}_n\|_\infty + \|\phi\|_\infty \|\hat{p}_n - f\|_\infty \\ &= (1 + \Lambda_n) \|f - \hat{p}_n\|_\infty. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 3.19 Interpretation von Satz 3.18. Abschätzung (3.20) besagt, dass der Interpolationsfehler um den Faktor $(1 + \Lambda_n)$ schlechter sein kann, als der Bestapproximationsfehler. Um genaue Interpolierende zu erhalten, ist ein kleines Λ_n nötig. □