Die erste Bedingung ist die allgemeine Konsistenzbedingung (6.38) und die zweite Bedinung ist genau (6.40) für $s = 2$. Mit diesen beiden Bedingungen sind alle 2-stufigen expliziten Runge–Kutta-Verfahren charakterisiert, welche die Konsistenz- und Konvergenzordnung 2 besitzen

$$\begin{array}{c|cc} c_2 & c_2 & \\ \hline & 1-\frac{1}{2c_2} & \frac{1}{2c_2} \end{array}, \quad \text{mit } c_2 \neq 0.$$

Für $c_2 = 1/2$ erhält man die Methode von Runge (1895)

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

Bezüglich der Approximation des Integrals in (6.36) entspricht das der Nutzung der Mittelpunktregel.

Für $c_2 = 1$ erhält man die Methode von Heun[16] (1900)

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array},$$

was der Nutzung der Trapezregel zur numerischen Quadratur in (6.36) entspricht. □

Bemerkung 6.98 *Zu autonomen Differentialgleichungen.* Jede explizite Differentialgleichung erster Ordnung

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x))$$

kann durch die Einführung der Funktionen

$$\overline{y}(x) := x \quad \text{und} \quad \tilde{\boldsymbol{y}}(x) := \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}(x) \\ \overline{y}(x) \end{pmatrix}$$

in die autonome Form

$$\tilde{\boldsymbol{y}}'(x) = \tilde{\boldsymbol{f}}\left(\tilde{\boldsymbol{y}}(x)\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. □

Satz 6.99 Konsistenz und Konvergenz expliziter Runge–Kutta-Verfahren. *Sei $y(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems (6.33) mit $f \in C(S)$ und genüge $f(x, y)$ in der zweiten Komponente einer Lipschitz-Bedingung. Dann ist ein explizites Runge–Kutta-Verfahren, welches von Ordnung p konsistent ist auch von Ordnung p konvergent.*

Beweis: Die Verfahrensfunktion bei expliziten Runge–Kutta-Verfahren ist eine Linearkombination von Funktionswerten der rechten Seite $f(x, y)$. Damit ist die Voraussetzung von Satz 6.87 erfüllt, da die dort geforderte Lipschitz-Bedingung an die Verfahrensfunktion bei Runge–Kutta-Verfahren gerade der Lipschitz-Bedingung an die rechte Seite der Differentialgleichung entspricht. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 6.87. ■

Bemerkung 6.100 *Explizite Runge–Kutta-Verfahren höherer Ordnung.* Analog zu 2-stufigen Verfahren kann man Bedingungen an die Koeffizienten eines expliziten Runge–Kutta-Verfahrens finden, um höhere Ordnungen zu erreichen. Das führt auf nichtlineare Gleichungssysteme, deren Lösung mit wachsender Anzahl der Stufen immer komplizierter wird. Es bleibt noch die Frage, was die Mindestanzahl von Stufen eines expliziten Runge–Kutta-Verfahrens ist, um eine gewisse Ordnung erreichen zu können. Antworten gab Butcher (1963, 1965, 1985)

[16]Karl Heun (1859 – 1929)

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
p & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
\min s & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 11
\end{array}.
$$

□

Beispiel 6.101 *Klassisches Runge–Kutta-Verfahren (1901).* Das sogenannte klassische Runge–Kutta-Verfahren ist ein vierstufiges Verfahren mit dem Butcher-Schema

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6
\end{array}.
$$

Es basiert auf der Simpson[17]-Formel. Der mittlere Knoten der Simpson-Formel wird zweimal betrachtet, $c_2 = c_3$, jedoch mit anderen zweiten Argumenten in der Berechnung der Steigungen. Dieses Verfahren ist von vierter Ordnung. □

Bemerkung 6.102 *Ausblick.* Etwa die Hälfte der Vorlesung Numerik II wird das Thema der numerischen Approximation von Anfangswertproblemen für gewöhnliche Differentialgleichungen vertiefen. Einige Aspekte sind

- Schrittweitenkontrolle: wie kann man für jeden Schritt eine angepasste Schrittweite wählen,
- Stabilitätstheorie für sogenannte steife Differentialgleichungen, darauf aufbauend die Untersuchung der Frage, wann ist die Verwendung expliziter Verfahren günstig und wann die Verwendung impliziter Verfahren,
- Mehrschrittverfahren.

□

[17] Thomas Simpson (1710 – 1761)