Kapitel 6

Anfangswertprobleme

6.1 Einführung

Bemerkung 6.1 *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Anfangswertprobleme.* Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen eine Funktion einer skalaren Variablen $y(x)$ gesucht ist, welche eine Gleichung der Form

$$F\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{6.1}$$

erfüllt. Differentialgleichung erhält man bei der Modellierung von Prozessen aus der Natur und der Wirtschaft.

Um eine konkrete Lösung von Differentialgleichungen vom Typ (6.1) zu berechnen, braucht man noch Zusatzinformationen. Sind geeignete Daten zu einem gewissen Punkt x_0 gegeben, so spricht man von Anfangswertproblemen. □

Beispiel 6.2 *Die Schwingungsdifferentialgleichung.* Betrachte die Schwingung einer Feder. **Bild** Es bezeichne

- t – Zeit,
- $y(t)$ – Ort,
- $y'(t)$ – Geschwindigkeit,
- $y''(t)$ – Beschleunigung,
- y_0 – Ursprungslage der Feder, Nullpunkt des Koordinatensystems $y = 0$.

Aus dem Newtonschen Gesetz $F = ma$ folgt mit $m = 1$, $a = y''(t)$ der Federkonstanten $\beta > 0$ und der Reibungskonstanten $\alpha > 0$

$$y''(t) = \underbrace{-\beta y(t)}_{\text{Rückstellkraft}} \underbrace{-\alpha y'(t)}_{\text{Reibungskraft}} \underbrace{+g(t)}_{\text{äußere Kraft}} . \tag{6.2}$$

Das ist die Schwingungsdifferentialgleichung. Hier wird in (6.2) der Fall $g(t) = 0$ betrachtet.

Bei der Federschwingung sind zwei grundsätzlich unterschiedliche Situationen möglich:

1. Die Reibungskraft ist groß im Vergleich zur Federkraft. Dann wird die Feder nicht wirklich schwingen, sondern sich einfach in ihre Ursprungslage y_0 zurückbegeben.
2. Die Reibungskraft ist klein im Vergleich zur Federkraft. Dann wird man eine (gedämpfte) Schwingung erhalten.

1. Fall: große Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft. Man macht den Ansatz für eine exponentiell abklingende Funktion

$$y(t) = ae^{bt}, \quad b < 0, \ a \neq 0.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in (6.2) ergibt

$$ab^2e^{bt} = -\beta ae^{bt} - \alpha abe^{bt} = -a\,(\beta + \alpha b)\,e^{bt}.$$

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls

$$b^2 = -\,(\beta + \alpha b) \quad \Longleftrightarrow \quad b_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}.$$

Da b reell sein soll, erhält man damit eine mathematische Bedingung dafür, dass die Reibungskraft groß im Vergleich zur Federkraft ist:

$$\frac{\alpha^2}{4} \geq \beta.$$

Im Fall, dass die Gleichheit in dieser Beziehung nicht gilt, erhält man zwei negative Lösungen für b und man rechnet leicht nach, dass jede Linearkombination eine Lösung von (6.2) ist

$$y(t) = a_1e^{b_1t} + a_2e^{b_2t}, \ a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Diese Kurve besitzt höchstens eine Nullstelle. Umstellen der Nullstellengleichung ergibt

$$1 = -\frac{a_2}{a_1}e^{(b_2-b_1)t}, \quad a_1 \neq 0.$$

Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion kann es höchstens einen Wert t geben, der diese Gleichung erfüllt. In Abbildung 6.1 ist eine mögliche Lösung im Falle der Anfangsauslenkung $y(0) = 1$ dargestellt, für die Parameter $\alpha = 3, \beta = 1, a_1 = -1, a_2 = 2$.

Im Fall der Gleichheit $\alpha^2/4 = \beta$ kann man nachrechnen, dass neben $e^{-\alpha/2\ t}$ auch $te^{-\alpha/2\ t}$ eine Lösung von (6.2) ist und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(t) = (a_1 + a_2t)\,e^{-\alpha/2\ t}, \ a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

Beide Fälle werden als aperiodischer Kriechfall bezeichnet.

2. Fall: kleine Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft. In diesem Fall wird man eine gedämpfte Schwingung erwarten. Die Dämpfung kann man wieder mit einer Exponentialfunktion beschreiben und die Schwingung mit einer Winkelfunktion. Ein geeigneter Ansatz ist

$$y(t) = e^{at}\,(c_1\cos(bt) + c_2\sin(bt))\,, \quad a < 0, b \neq 0.$$

Man schreibt diesen Ansatz zunächst in anderer Form. Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^+$. Setzt man $c_1 = A\cos\lambda$, $c_2 = A\sin\lambda$, so erhält man

$$y(t) = Ae^{at}\,(\cos\lambda\cos(bt) + \sin\lambda\sin(bt)) = Ae^{at}\cos(bt - \lambda).$$

Einsetzen in (6.2) liefert

$$Ae^{at}\left((a^2 - b^2 + \alpha a + \beta)\cos(bt - \lambda) - b(2a + \alpha)\sin(bt - \lambda)\right) = 0.$$

Das ist erfüllt, wenn der letzte Faktor für alle t verschwindet, also wenn

$$a = -\frac{\alpha}{2}, \quad b = \pm\sqrt{a^2 + \alpha a + \beta} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} + \beta} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha^2}{4} + \beta}.$$

gelten. Die Lösung ist eine gedämpfte Schwingung, siehe in Abbildung 6.1 für $\alpha = 0.1, \beta = 3, \lambda = 1, A = 2$ und den Anfangswert $y(0) = 1$. □

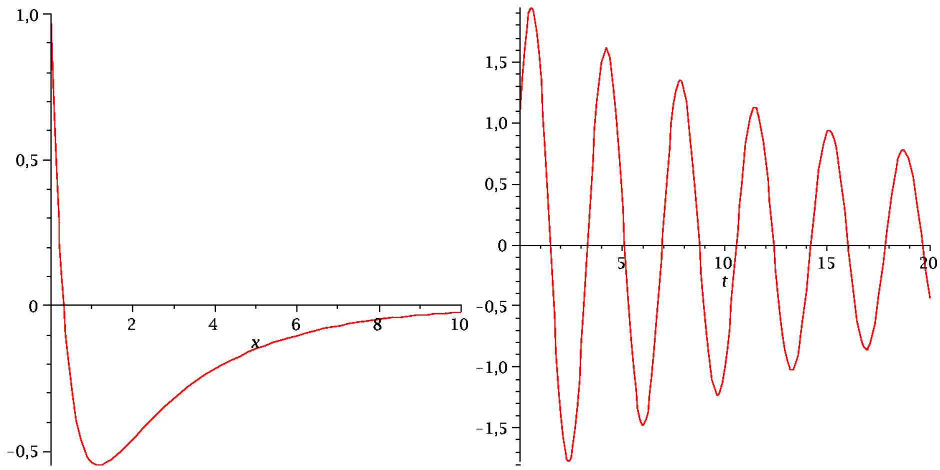


Abbildung 6.1: Beispiele für Lösungen der Schwingungsdifferentialgleichung, links: aperiodischer Kriechfall, rechts: gedämpfte Schwingung.

Bemerkung 6.3 *Allgemeine Situation.* Im Allgemeinen kann man eine Differentialgleichung nur in Spezialfällen analytisch lösen. Generell kann man jedoch Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (6.1) mit geeigneten Anfangsbedingungen untersuchen. Zudem kann man sich mit Hilfe von numerischen Näherungsverfahren eine Vorstellung von der Gestalt der Lösung verschaffen, obwohl man keine explizite Formel für diese besitzt. □

6.2 Grundbegriffe, einige integrierbare Typen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

6.2.1 Definitionen und Beispiele

Definition 6.4 Gewöhnliche Differnentialgleichung 1. Ordnung, explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung wird von erster Ordnung genannt, wenn in ihr keine höhere Ableitung von $y(x)$ als die erste Ableitung vorkommt. Die allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung lautet

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0.$$

Eine Funktion $y(x)$ ist Lösung dieser Gleichung in einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wenn $y(x)$ in I differenzierbar ist und $F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung wird explizit genannt, wenn man sie in der Form

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) \tag{6.3}$$

schreiben kann, wobei $f(x, y)$ eine auf einer Menge G der (x, y)–Ebene erklärte reellwertige Funktion ist. Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ ist Lösung von (6.3), wenn $y(x)$ in I differenzierbar ist und

$$(x, y(x)) \in G, \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

für alle $x \in I$ ist. □

Beispiel 6.5 *Organisches Wachstum.* Die absolute Wachstumsrate von Bakterienkulturen auf unerschöpflichem Nährboden ist proportional zur Anzahl N der im Augenblick t vorhandenen Bakterien

$$N'(t) = \alpha N(t). \tag{6.4}$$

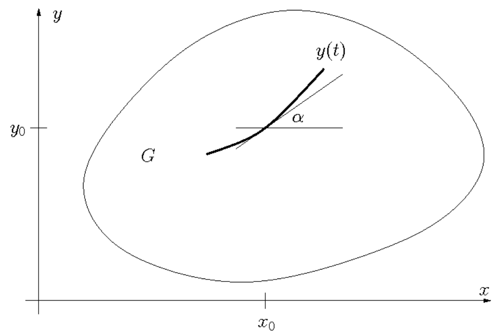
Hierbei ist α die relative Wachstumsrate der Bakterienart. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare und demzufolge stetige Funktion. Das steht streng genommen im Widerspruch zur Tatsache, dass N eine natürliche Zahl sein muss. In der Praxis ist N jedoch sehr groß, so dass man mit dem mathematischen Modell, welches durch die Differentialgleichung (6.4) gegeben ist, nur einen kleinen Modellfehler begeht. Die Lösung von (6.4) wird im Abschnitt 6.2.3 behandelt.

Für Ableitungen nach der Zeit verwendet man statt $N'(t)$ auch oft die Bezeichnung $\dot{N}(t)$. □

Bemerkung 6.6 *Geometrische Interpretation.* Die explizite Differentialgleichung (6.3) gestattet eine einfache geometrische Interpretation. Geht eine Lösung $y(t)$ von (6.3) durch den Punkt $(x_0, y_0) \in G$, das heißt $y(x_0) = y_0$, so beträgt ihre Steigung an dieser Stelle

$$y'(x_0) = f\left(x_0, y_0\right) = \tan \alpha,$$

wobei α der Anstiegswinkel ist.

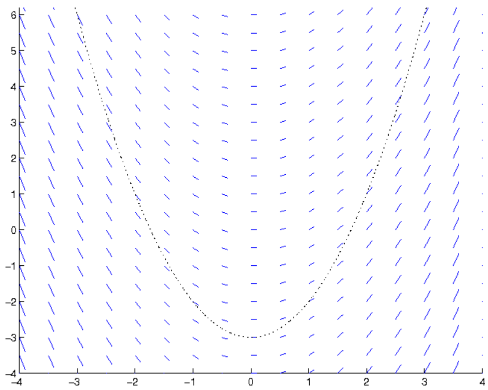


Man nennt das Tripel $(x_0, y_0, \tan\alpha) = (x_0, y_0, f\left(x_0, y_0\right))$, oder sein geometrisches Äquivalent, Linienelement. Die Gesamtheit aller Linienelemente $(x, y, f(x, y))$ heißt Richtungsfeld. Eine Kurve $y(x)$ erweist sich als Lösung der Differentialgleichung (6.3), wenn sie in das vorgegebene Richtungsfeld passt. Das heißt, in jedem Kurvenpunkt stimmt ihre Tangentenrichtung mit der Richtung des Linienelements überein. □

Beispiel 6.7 *Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung.* Gesucht sei die Lösung von

$$y'(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist $f(x, y) = x$. Diese Funktion ist für konstantes x konstant.



Die Gesamtheit aller Lösungen einer Differentialgleichung nennt man allgemeine Lösung. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man sieht an diesem Beispiel, dass diese Differentialgleichung zum einen unendlich viele Lösungen besitzt. Zum anderen gibt es für jeden Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösung, die diesen Punkt enthält.

In der Praxis ist es oft nicht so wichtig, alle Lösungen zu kennen, sondern eine Lösung zu finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft. □

Definition 6.8 Anfangswertproblem, Anfangswert. Gegeben sind eine auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ erklärte Funktion $f(x, y)$ und ein fester Punkt $(x_0, y_0) \in G$. Dann nennt man das Problem

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right), \quad y\left(x_0\right) = y_0$$

Anfangswertproblem (AWP). Die Nebenbedingung wird Anfangsbedingung (AB) genannt. □

6.2.2 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Definition 6.9 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{6.5}$$

nennt man gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen. □

Beispiel 6.10 *Unbestimmtes Integral.* Ein Spezialfall von (6.5) ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x).$$

Der Lösungsweg für diese Differentialgleichung ist bereits aus der Schule bekannt: unbestimmte Integration. Existiert eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$, so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = F(x) + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist.

Man spricht anstelle des „Auffindens der Lösung einer Differentialgleichung“ auch oft von der „Integration einer Differentialgleichung“. □

Satz 6.11 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. *Die Funktion $f(x)$ sei im Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $g(y)$ sei im Intervall $(c,d) \subset \mathbb{R}$ stetig und es gelte $g(y) \neq 0$ für alle $y \in (c,d)$. Dann ist das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a,b),\ y_0 \in (c,d), \tag{6.6}$$

eindeutig lösbar. Seien $G(y)$ die Stammfunktion von $1/g(y)$ mit $G(y_0) = 0$ und $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$ mit $F(x_0) = 0$. Dann ist

$$y(x) = \left(G^{-1} \circ F\right)(x) = G^{-1}(F(x)) \tag{6.7}$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems in einer Umgebung von x_0. Hierbei ist $G^{-1}(y)$ die Umkehrfunktion von $G(y)$.

Beweis: Für Interessenten.
i) Eindeutigkeit. Angenommen, $y(x)$ sei eine Lösung des AWP (6.6) mit $y(x_0) = y_0$. Dann gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Da beide Funktionen dieser Gleichung stetig sind, kann man sie integrieren

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{g(y(x))}\ dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\ dx.$$

Da $G(y)$ die Stammfunktion von $1/g(y)$ ist und $F(x)$ die Stammfunktion von $f(x)$, erhält man mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$G(y(x)) - \underbrace{G(\underbrace{y(x_0)}_{=y_0})}_{=0} = F(x) - \underbrace{F(x_0)}_{=0}. \tag{6.8}$$

Da $1/g(y) \neq 0$ ist, ist $G(y)$ eine streng monotone Funktion. Daraus folgt, dass die Umkehrfunktion $G^{-1}(y)$ existiert. Damit ergibt sich aus (6.8)

$$y(x) = \left(G^{-1} \circ F\right)(x) = G^{-1}(F(x)).$$

Das heißt, existiert eine Lösung des AWP (6.6), so kann man sie in der Form (6.7) darstellen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Funktionen $F(x)$ und $G(y)$.
ii) Existenz. Man zeigt durch nachrechnen, dass (6.7) eine Lösung des AWP (6.6) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &\overset{\text{Kettenregel}}{=} \left(G^{-1}\right)'(F(x))\,F'(x) \\ &\overset{\text{Abl.Umkehrfunktion}}{=} \frac{1}{G'\left(G^{-1}(F(x))\right)} F'(x) \\ &\overset{(6.7)}{=} \frac{1}{G'(y(x))} F'(x) \\ &\overset{G'(y)=1/g(y)}{=} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(y)}} = f(x)g(y). \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0.$$

■

Beispiel 6.12 *Differentialgleichung mit getrennten Variablen.* Betrachte

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x}{y(x)}, \quad x \in (a,b),\ y \in (c,d),\ 0 \notin (c,d) \\ y(x_0) &= y_0 \in (c,d). \end{aligned}$$

Mit der obigen Herangehensweise erhält man

$$f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} t \; dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

und

$$g(y) = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{g(y)} = y \quad \Longrightarrow \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} t \; dt = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}.$$

Nach (6.8), oder (6.7) durch Anwendung von G auf beide Seiten, folgt

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}. \tag{6.9}$$

Durch Umstellen erhält man die Lösung

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } c > 0, \\ y &= -\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } d < 0. \end{aligned}$$

Die Wahl von x kann in Abhängigkeit von (x_0, y_0) eingeschränkt sein. Nach (6.9) kann man die Lösung auch in der Form

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2 =: c_0$$

schreiben. Dies ist eine Hyperbel. Sei $c_0 > 0$, dann hat man für $c > 0$ einen oberen Ast, siehe Abbildung 6.2, und für $d < 0$ einen unteren Ast.

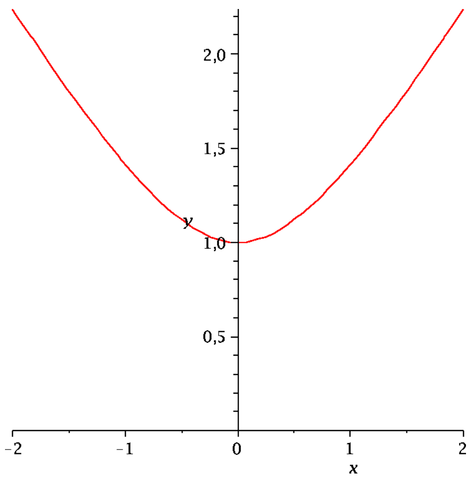


Abbildung 6.2: Beispiel 6.12, oberer Hyperbelast, Lösung im Fall $c > 0$, $c_0 > 0$.

Für $c_0 < 0$ besteht die Lösung aus je einem Teil des linken beziehungsweise des rechten Astes einer Hyperbel. Im Fall $c_0 = 0$ ist die Lösung $y = |x|$ oder $y = -|x|$, jeweils mit $x \neq 0$. $\square$

Bemerkung 6.13 *Methode der Trennung der Variablen.* Man braucht sich die Lösungsformel für das Anfangswertproblem (6.6) nicht zu merken, da es einen einfachen, wenngleich mathematisch nicht ganz exakten, Weg zur Berechnung der Lösung gibt – die Methode der Trennung der Variablen:

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{dy}{dx} & = & f(x)g(y) & \text{behandle linke Seite wie einen Bruch} \\[2ex] \dfrac{dy}{g(y)} & = & f(x)dx & \text{integriere} \\[2ex] \displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} & = & \int f(x)\ dx & \text{finde Stammfunktionen} \\[2ex] G(y) & = & F(x)+c & \text{fasse Integrationskonstanten zusammen} \\ y & = & G^{-1}\left(F(x)+c\right) & \text{löse nach } y \text{ auf.} \end{array}$$

Die Konstante c wird aus der Anfangsbedingung bestimmt. □

Beispiel 6.14 *Methode der Trennung der Variablen.* Betrachte die Methode der Trennung der Variablen in Beispiel 6.12. Man hat

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{x}{y} \quad \Longrightarrow \\ ydy & = & xdx \quad \Longrightarrow \\ \displaystyle\int y\ dy & = & \displaystyle\int x\ dx \quad \Longrightarrow \\ \dfrac{y^2}{2} & = & \dfrac{x^2}{2}+c. \end{array}$$

Nun hat man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Anfangsbedingung ergibt

$$\frac{y_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2}\left(y_0^2 - x_0^2\right).$$

□

Bemerkung 6.15 *Der Fall, dass $g(y)$ eine Nullstelle besitzt.* Sei $y_1 \in (c,d)$ mit $g(y_1) = 0$. Dann ist eine Lösung des AWP (6.6) mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_1$ sofort durch $y(x) = y_1$ für alle $x \in (a,b)$ gegeben, da dann $g(y) = g(y_1) = 0$ und beide Seiten der Differentialgleichung von (6.6) gleich Null sind. Es kann jedoch passieren, dass es weitere Lösungen dieses AWP gibt, siehe Übungsaufgaben. □

6.2.3 Lineare Differentialgleichungen

Definition 6.16 Lineare Differentialgleichung 1.Ordnung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \tag{6.10}$$

wobei $f(x), g(x)$ definiert und stetig in $(a,b) \subset \mathbb{R}$ sind, heißt lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Für $g(x) \equiv 0$ spricht man von einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. □

Bemerkung 6.17 *Zu linearen Differentialgleichungen.*

- Die gewöhnliche Differentialgleichung heißt linear, weil $y'(x)$ und $y(x)$ nur linear auftreten.
- Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

- Man sieht sofort, dass $y(x) \equiv 0$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

$\square$

Satz 6.18 Superpositionsprinzip.

i) Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist auch jede Linearkombination $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ mit beliebigen Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

ii) Sind $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung und $y_h(x)$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, dann ist $y_i(x) + y_h(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

iii) Sind $y_i(x)$ und $\tilde{y}_i(x)$ zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist ihre Differenz Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

Beweis: Alle Aussagen beweist man durch direktes Nachrechnen.
i) Es gilt

$$\begin{aligned} & (c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x))' + f(x)\,(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\ = \;& c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + f(x)\,(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) \\ = \;& c_1 \underbrace{\left(y_1'(x) + f(x) y_1(x)\right)}_{=0} + c_2 \underbrace{\left(y_2'(x) + f(x) y_2(x)\right)}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

da $y_1(x), y_2(x)$ nach Voraussetzung Lösung der homogenen Differentialgleichung sind. Man nutzt im Beweis die Linearität der Differentialgleichung und die Linearität der Differentiation.
ii), iii) Übungsaufgaben. $\blacksquare$

Satz 6.19 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. *Man erhält alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, indem man zu einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y_i(x)$ alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $\{y_h(x)\}$ addiert.*

Beweis: Jede Funktion $y_i(x) + \tilde{y}_h(x)$ mit $\tilde{y}_h(x) \in \{y_h(x)\}$ ist nach dem Superpositionsprinzip ii) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Also ist $y_i(x) + \{y_h(x)\}$ eine Teilmenge der Gesamtheit aller Lösungen.

Sei $\tilde{y}_i(x)$ eine beliebige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung. Nach Superpositionsprinzip iii) ist dann $\tilde{y}_i(x) - y_i(x)$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Also gibt es ein $\tilde{y}_h(x) \in \{y_h(x)\}$ mit

$$\tilde{y}_i(x) - y_i(x) = \tilde{y}_h(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \tilde{y}_h(x).$$

Demzufolge lässt sich jede Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung in der oben angegebenen Form darstellen. $\blacksquare$

$$\boxed{\begin{aligned} & \text{allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung} \\ = \;& \text{spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung} \\ & + \text{allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung} \end{aligned}}$$

Satz 6.20 Existenz und Darstellung der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. *Sei $f(x)$ in (a,b) stetig. Es gibt eine Funktion $y_h(x)$ mit $D(y_h) = (a,b)$, $y_h \in C^1(a,b)$, $y_h(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, so dass*

$$\{cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$$

die Gesamtheit aller Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Das ist ein eindimensionaler Unterraum von $C^1(a,b)$. Es gilt

$$y_h(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt\right).$$

Beweis: Für Interessenten.
Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung

$$y_h'(x) + f(x)y_h(x) = 0 \quad \iff \quad y_h'(x) = -f(x)y_h(x).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wähle $y_h(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann hat die Differentialgleichung die Lösung

$$y_h(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt\right)$$

mit $x_0 \in (a,b)$, denn man erhält mit der Kettenregel und der Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze

$$y_h'(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt\right)(-f(x)) = -f(x)y_h(x).$$

Zur Erinnerung: Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze, wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist:

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)\ dt = \frac{d}{dx}\big(F(x) - F(x_0)\big) = F'(x) = f(x),$$

mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung.

Da $f(x)$ stetig ist, ist $y_h(x)$ differenzierbar. Außerdem gilt wegen der Exponentialfunktion $y_h(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$. Nach dem Superpositionsprinzip ist $\{cy_h(x)\}$ mit $c \in \mathbb{R}$ Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Es bleibt zu zeigen, dass es neben $\{cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ keine anderen Lösungen gibt. Sei $\tilde{y}_h \in C^1(a,b)$ eine beliebige Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Man setzt

$$\tilde{y}_h(x) = w(x)y_h(x) \quad \Longrightarrow \quad w(x) = \frac{\tilde{y}_h(x)}{y_h(x)},\ y_h(x) \neq 0.$$

Da $\tilde{y}_h, y_h \in C^1(a,b)$ und $y_h(x) \neq 0$ folgt $w \in C^1(a,b)$. Es ist

$$\begin{aligned} w'(x) &= \frac{\tilde{y}_h'(x)y_h(x) - \tilde{y}_h(x)y_h'(x)}{(y_h(x))^2} \\ &\overset{\text{Dgl. einsetzen}}{=} \frac{-f(x)\tilde{y}_h(x)y_h(x) + \tilde{y}_h(x)f(x)y_h(x)}{(y_h(x))^2} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $w(x)$ eine Konstante und $\tilde{y}_h(x) = cy_h(x)$. Es gibt also keine weiteren Lösungen als $\{cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$. ■

Satz 6.21 Existenz einer Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. *Seien $f(x), g(x)$ in (a,b) stetig. Dann gibt es eine Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit $D(y_i) = (a,b)$, $y_i \in C^1(a,b)$, so dass $\{y_i(x) + cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist (affine Mannigfaltigkeit mit Trägerpunkt $y_i(x)$).*

Beweis: Nutze den Ansatz

$$y_i(x) = c(x)y_h(x),$$

wobei $y_h(x)$ die im Beweis von Satz 6.20 konstruierte Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Dieser Ansatz wird Variation der Konstanten genannt. Man versucht, eine stetig differenzierbare Funktion $c(x)$ so zu bestimmen, dass $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} c'(x)y_h(x) + c(x)y_h'(x) + f(x)c(x)y_h(x) &= g(x) \iff \\ c'(x)y_h(x) + c(x)\underbrace{\left(y_h'(x) + f(x)y_h(x)\right)}_{=0} &= g(x). \end{aligned}$$

Damit genügt $c(x)$ der Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$c'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)} \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{y_h(t)}\, dt, \ x_0 \in (a,b).$$

Rücksubstitution liefert

$$y_i(x) = \left(\int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{y_h(t)}\, dt\right) y_h(x).$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar, da beide Faktoren stetig differenzierbar sind. Nach Konstruktion löst $y_i(x)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Nach dem Superpositionsprinzip ist $\{y_i(x) + cy_h(x) \ : \ c \in \mathbb{R}\}$ die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. ■

Satz 6.22 Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems. *Seien $f(x), g(x)$ in (a,b) stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \quad y(x_0) = y_0, \ x_0 \in (a,b),$$

mit beliebigem $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung.

Beweis: Seien $x_0 \in (a,b)$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Einsetzen der Anfangsbedingung in die im Satz 6.21 angegebene allgemeinen Lösung ergibt

$$y_i(x_0) + cy_h(x_0) = y(x_0) = y_0.$$

Mit Hilfe der in den Beweisen von Satz 6.20 und 6.21 konstruierten Darstellung der allgemeinen Lösung folgt

$$0 + c \cdot 1 = y_0 \quad \Longrightarrow \quad c = y_0.$$

Damit ist die Konstante eindeutig bestimmt. ■

Bemerkung 6.23 *Fazit.*

- Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung wird mit Trennung der Veränderlichen gelöst.
- Eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung findet man mit der Methode der Variation der Konstanten.
- Ob man die allgemeine Lösung explizit angeben kann, hängt „lediglich" davon ab, ob man die auftretenden Integrale explizit berechnen kann.
- Ein Anfangswertproblem löst man, indem man zuerst die allgemeine Lösung berechnet und dann in diese die Anfangsbedingung einsetzt.
- Besitzen die Koeffizientenfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ in (6.10) eine „günstige" Gestalt, so kann man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auch mit einem geeigneten Ansatz gewinnen. Sind $f(x)$ und $g(x)$ beispielsweise Polynome, so setzt man auch $y_i(x)$ als Polynom mit geeignetem Grad an. Diese Herangehensweise nennt man Störgliedansätze, siehe Übungsaufgaben.

□

Beispiel 6.24 *Lösung eines linearen Anfangswertproblems 1. Ordnung.* Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) + y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 4711.$$

i) allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} y_h' + y_h &= 0 \quad \Longrightarrow \\ \int \frac{dy}{y_h} &= -\int dx \quad \Longrightarrow \\ \ln|y_h| &= -x + c_0 \quad \Longrightarrow \\ y_h(x) &= ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Variation der Konstanten. Der Ansatz ist

$$y_i(x) = c(x)e^{-x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-x} + \underbrace{c(x)\left(-e^{-x}\right) + c(x)e^{-x}}_{=0} &= \cos(x) \quad \Longrightarrow \\ c'(x) &= e^x \cos(x) \quad \Longrightarrow \\ c(x) &= \int_0^x e^t \cos(t)\ dt \quad \Longrightarrow \\ c(x) &= \frac{1}{2}e^x\left(\cos(x) + \sin(x)\right) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz ergibt

$$y_i(x) = c(x)y_h(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Der zweite Term gehört zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y_i(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + c_0 e^{-x}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

iii) Anfangsbedingung. Einsetzen in die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt

$$y_i(0) = \frac{1}{2} + c_0 = 4711 \quad \Longrightarrow \quad c_0 = 4710.5.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(\cos(x) + \sin(x)\right) + 4710.5e^{-x}.$$

Wichtig: Nicht die fertigen Formeln merken, sondern den Weg!!! □

6.2.4 Die Bernoullische Differentialgleichung

Definition 6.25 Bernoulli[1]sche Differentialgleichung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f_0(x)y^\alpha(x) + f_1(x)y(x) \tag{6.11}$$

mit $f_0, f_1 \in C([a,b])$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 1$, $f_0(x) \not\equiv 0$ heißt Bernoullische Differentialgleichung. □

[1] Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

Satz 6.26 Transformation der Bernoullische Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. *Ist $y(x)$ eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung* (6.11) *mit $y(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so genügt*

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$z'(x) = (1-\alpha)\left(f_0(x) + f_1(x)z(x)\right). \tag{6.12}$$

Umgekehrt erhält man aus jeder Lösung $z(x)$ von (6.12) *mit $z(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ durch*

$$y(x) = z^{1/(1-\alpha)}(x)$$

eine Lösung von (6.11).

Das Anfangswertproblem zu (6.11) *mit $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, ist eindeutig lösbar, falls $y_0 > 0$ ist.*

Beweis: Für Interessenten.
Aus (6.11) folgt durch Division mit $y^\alpha(x) > 0$

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) &= \left(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)\right)(1-\alpha) \quad \Longleftrightarrow \\
\left(y^{1-\alpha}\right)'(x) &= \left(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)\right)(1-\alpha).
\end{aligned}$$

Setze $z(x) = y^{1-\alpha}(x) > 0$. Daraus folgt mit (6.11)

$$z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1-\alpha)\left(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)\right) = (1-\alpha)\left(f_0(x) + f_1(x)z(x)\right).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Da alle Umformungen äquivalent waren folgt, dass falls $y(x)$ (6.11) löst, so löst $z(x)$ auch (6.12) und umgekehrt.

Das Anfangswertproblem zu (6.12) mit $z(x_0) = z_0 \in \mathbb{R}^+$ beliebig (da $z(x) > 0$) ist nach Satz 6.22 eindeutig lösbar. Damit ist auch das Anfangswertproblem zu (6.11) mit $y_0 = y(x_0) = z_0^{1/(1-\alpha)} > 0$ eindeutig lösbar. Die Abbildung $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $z_0 \mapsto y_0$ ist bijektiv für $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Damit hat das Anfangswertproblem zu (6.11) für jedes $y_0 > 0$ eine eindeutige Lösung. ■

Beispiel 6.27 *Lösung einer Bernoullischen Differentialgleichung.* Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) + 2xy(x) = 2x^3y^3(x), \quad y(0) = 2.$$

Der Ansatz lautet

$$z(x) = y^{-2}(x) = \frac{1}{y^2(x)} \quad \Longrightarrow \quad z'(x) = -2y^{-3}(x)y'(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
\frac{y'(x)}{y^3(x)} + 2\frac{x}{y^2(x)} &= 2x^3 \quad \Longrightarrow \\
-\frac{z'(x)}{2} + 2xz(x) &= 2x^3 \quad \Longrightarrow \\
z'(x) &= 4xz(x) - 4x^3.
\end{aligned}$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Für die homogene Gleichung erhält man

$$z_h'(x) = 4xz_h(x) \quad \Longrightarrow \quad z_h(x) = ce^{2x^2}, \ c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung kann man mit Variation der Konstanten finden. Der Ansatz ist

$$z_i(x) = c(x)e^{2x^2}.$$

Einsetzen in Differentialgleichung liefert

$$c'(x)e^{2x^2} = -4x^3 \quad \Longrightarrow \quad c'(x) = -4x^3 e^{-2x^2}.$$

Zweimalige partielle Integration ergibt

$$c(x) = e^{-2x^2}\left(\frac{1}{2} + x^2\right).$$

Einsetzen in den Ansatz liefert

$$z_i(x) = \left(\frac{1}{2} + x^2\right) \quad \Longrightarrow \quad z(x) = \left(\frac{1}{2} + x^2\right) + ce^{2x^2}, \; c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems der Bernoullischen Differentialgleichung benötigt man nur die Lösung mit $z(x) > 0$ in einer Umgebung von $x = 0$. Durch Rücksubstitution erhält man

$$y(x) = z^{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{1} + x^2 + ce^{2x^2}\right)^{-1/2} > 0.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt

$$y(0) = \left(\frac{1}{2} + c\right)^{-1/2} = 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 = 4\left(\frac{1}{2} + c\right) \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{1}{4}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = z^{-1/2}(x) = \left(\frac{1}{2} + x^2 - \frac{1}{4}e^{2x^2}\right)^{-1/2},$$

siehe Abbildung 6.3.

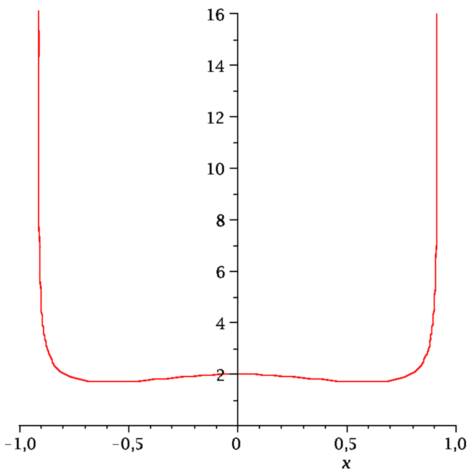


Abbildung 6.3: Lösung des Anfangswertproblems aus Beispiel 6.27.

Man beachte:

- Der Definitionsbereich von $y(x)$ ist beschränkt.
- Für $y_0 < 0$ ist das Anfangswertproblem nicht lösbar.
- *Wichtig: Substitution* $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ *merken !!!*

□

6.2.5 Die Riccatische Differentialgleichung

Definition 6.28 Riccati[2]sche Differentialgleichung. Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f_0(x)y^2(x) + 2f_1(x)y(x) + f_2(x) \tag{6.13}$$

mit $f_i \in C(a,b)$, $i \in \{0,1,2\}$, $f_0(x) \not\equiv 0$ heißt Riccatische Differentialgleichung. □

Bemerkung 6.29 *Spezialfälle.* Spezialfälle von (6.13) sind
- $f_0(x) \equiv 0$, lineare Differentialgleichung,
- $f_1(x) \equiv 0$, Bernoullische Differentialgleichung.

□

Bemerkung 6.30 *Normalform.* Seien $f_1 \in C^1(a,b)$, $f_0 \in C^2(a,b)$ sowie $f_0(x) \neq 0$ in (a,b). Dann kann man die Riccatische Differentialgleichung mittels der Transformation

$$z(x) = f_0(x)y(x) + \frac{1}{2f_0(x)}\left(f_0'(x) + 2f_1(x)f_0(x)\right)$$

in die sogenannte Normalform

$$z'(x) = z^2(x) - f(x) \tag{6.14}$$

mit

$$f(x) = \left(-f_0f_2 + f_1^2 - f_1' + \frac{1}{4f_0^2}\left[4f_0f_0'f_1 + 3(f_0')^2 - 2f_0f_0''\right]\right)(x)$$

überführen *Übungsaufgabe.* Eine Funktion $y(x)$ ist genau dann Lösung von (6.13) wenn $z(x)$ Lösung von (6.14) ist. □

Bemerkung 6.31 *Lösbarkeit.* Die Riccatische Differentialgleichung ist im Allgemeinen nicht durch elementare Rechenoperationen und Aufsuchen von Stammfunktionen lösbar. Dies ist nur in folgenden Spezialfällen von (6.14) möglich:
- $f(x) = c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (a,b)$ $\quad\Longrightarrow\quad$ Trennung der Veränderlichen,
- $f(x) = c/x^2$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann führt die Transformation $u(x) = 1/z(x)$ zu

  $$u'(x) = -1 + c\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2.$$

  Das ist eine sogenannte homogene Differentialgleichung, siehe in der Literatur zur analytischen Lösung dieses Typs von Differentialgleichungen.
- Der wichtigste Fall ist der Folgende. Ist eine Lösung $z_0(x)$ von (6.14) bekannt, dann können alle weiteren Lösungen durch elementare Rechenoperationen und Aufsuchen der Stammfunktion bestimmt werden. Die allgemeine Lösung lautet

  $$z(x) = z_0(x) + \frac{1}{u_0(x) + cu_1(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

  wobei $u_0(x)$ eine spezielle Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist und $u_1(x)$ Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung.

□

Satz 6.32 Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems. *In jedem Intervall $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems der Riccatischen Differentialgleichung* (6.14) *mit der Anfangsbedingung $z(x_0) = z_0$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$.*

[2] Jacobo Francesco Riccati (1676 – 1754)

Beweis: Seien $z_1, z_2 \in C^1(\alpha, \beta)$ zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Dann erfüllt die Differenz $y(x) = z_1(x) - z_2(x)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= z_1'(x) - z_2'(x) = z_1^2(x) - f(x) - \big(z_2^2(x) - f(x)\big) = z_1^2(x) - z_2^2(x) \\ &= \big(z_1(x) - z_2(x)\big)\big(z_1(x) + z_2(x)\big) = y(x)\big(y(x) + 2z_2(x)\big) =: \tilde{f}(x)y(x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{f}(x) := y(x) + 2z_2(x)$ und $y(x_0) = 0$. Man kann sich $\tilde{f}(x)$ als gegebene Funktion denken. Demzufolge erfüllt $y(x)$ das Anfangswertproblem einer linearen Differentialgleichung, welches eindeutig lösbar ist. Die Lösung lautet $y(x) \equiv 0$. ■

Bemerkung 6.33 *Existenz einer Lösung.* Die Existenz einer Lösung wird später, Folgerung 6.64, bewiesen. □

Satz 6.34 Konstruktion aller Lösungen mit einer bekannten Lösung. *Sei $z_0 \in C^1(a, b)$ eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung* (6.14) *mit $f \in C(a, b)$. Die Funktion $y \in C^1(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, ist genau dann eine von $z_0(x)$ verschiedene Lösung von* (6.14)*, das heißt $y(x) \neq z_0(x)$ in (α, β), wenn*

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - z_0(x)}$$

in (α, β) eine nicht verschwindende Lösung, das heißt $u(x) \neq 0$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$, der linearen Differentialgleichung

$$u'(x) + 2z_0(x)u(x) + 1 = 0 \tag{6.15}$$

ist.

Beweis: Für Interessenten.
Verwende den Ansatz

$$z_0(x) = y(x) - \frac{1}{u(x)} \quad \Longrightarrow \quad z_0'(x) = y'(x) + \frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

Dieser Ansatz ist wohldefiniert, da $u(x) \neq 0$ in (α, β). Einsetzen in (6.14) ergibt

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{u'(x)}{u^2(x)} &= y^2(x) - \frac{2y(x)}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)} - f(x) \quad \Longrightarrow \\ y'(x) - y^2(x) + f(x) &= \frac{1}{u^2(x)}\big(1 - 2y(x)u(x) - u'(x)\big) \\ &= \frac{1}{u^2(x)}\left(1 - 2z_0(x)u(x) - 2\frac{u(x)}{u(x)} - u'(x)\right) \\ &= -\frac{1}{u^2(x)}\big(1 + 2z_0(x)u(x) + u'(x)\big). \end{aligned}$$

i) Ist $y(x)$ die Lösung von (6.14), so ist die linke Seite gleich Null und $u(x)$ erfüllt die Differentialgleichung (6.15), da $1/u^2(x) > 0$.

ii) Genügt andererseits $u(x)$ der Gleichung (6.15) und ist $u(x) \neq 0$ in (α, β), so erfüllt $y(x)$ (6.14) und es gilt $y(x) \neq z_0(x)$ in (α, β), da

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

Da $1/u(x) \neq 0$ ist, gilt $y(x) \neq z_0(x)$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$. ■

Bemerkung 6.35 Bestimmung aller Lösungen von (6.14)**.** Die Bestimmung aller Lösungen von (6.14), im Falle dass eine Lösung bekannt ist, erfolgt wie der Beweis der beiden letzten Sätze. Sei $z_0(x)$ eine bekannte Lösung von (6.14).

- Sei $z_1(x)$ einen andere Lösung von (6.14), dann erfüllt die Differenz $y(x) = z_1(x) - z_0(x)$ die Differentialgleichung

$$y'(x) = y^2(x) + 2z_0(x)y(x).$$

Das ist eine Bernoullische Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung man bestimmen kann.
- Oder man verwendet den Ansatz vom Beweis von Satz 6.34:

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)}$$

und berechnet $u(x)$ durch Lösen von (6.15).

□

Beispiel 6.36 *Lösung einer Riccatischen Differentialgleichung.* Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) = y^2(x) - (2x+1)y(x) + (1 + x + x^2),$$

vgl. (Kamke, 1945, S. 43).

i) Finden einer speziellen Lösung. Das ist der schwierigste Teil, im allgemeinen hilft nur scharfes Hinsehen und Probieren. In diesem Beispiel ist $z_0(x) = x$ eine Lösung.

ii) Ansatz. Mit dem Ansatz

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)} \quad \Longrightarrow \quad y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

gelangt man hier auch ohne Überführung in die Normalform zu einer linearen Differentialgleichung. Einsetzen in die Differentialgleichung für $y(x)$ ergibt

$$u'(x) = u(x) - 1.$$

iii) Lösen der linearen Differentialgleichung.

$$u(x) = 1 + ce^x.$$

iv) Rücksubstitution.

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)} = x + \frac{1}{1+ce^x}.$$

Das ist die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. □

6.3 Allgemeine Existenz– und Eindeutigkeitssätze

6.3.1 Allgemeines

Bemerkung 6.37 *Inhalt.* Man hat bei den Spezialfällen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung aus Abschnitt 6.2 gesehen, dass es immer schwieriger wurde, analytische Lösungen anzugeben. Bei einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung wird das nicht mehr möglich sein. Trotzdem kann man auch im allgemeinen Fall Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen untersuchen.

In diesem Abschnitt werden zwei grundlegende Sätze behandelt:
- Satz von Picard–Lindelöf (sukzessive Approximation):
  - beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz,

- ◦ Voraussetzung: Stetigkeit und partielle Lipschitz–Bedingung der rechten Seite,
  - ◦ Ergebnis: Existenz und Eindeutigkeit.
- Satz von Peano (Polygonzüge):
  - ◦ Voraussetzung: Stetigkeit der rechten Seite,
  - ◦ Ergebnis: Existenz.

□

Bemerkung 6.38 *Explizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.* In diesem Kapitel werden explizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, da Untersuchungen für Systeme nicht anders sind als für eine einzelne Gleichung. Seinen $y_i \ : \ I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_i \ : \ D(f_i) = D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$. Dann werden die Vektoren

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}$$

definiert. Die betrachteten Systeme haben dann die Form

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \text{oder} \quad y_i'(x) = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \ i = 1, \ldots, n. \tag{6.16}$$

Das zugehörige Anfangswertproblem lautet wie folgt. Gegeben seien $n + 1$ reelle Zahlen $x^{(0)}, y_1^0, \ldots, y_n^0$ mit $(x^{(0)}, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in D$. Gesucht ist eine Lösung von (6.16) mit $y_i\left(x^{(0)}\right) = y_i^0$, $i = 1, \ldots, n$. □

Bemerkung 6.39 *Umformung einer Differentialgleichung in äquivalente Integralgleichung.* Sei $\mathbf{y}(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\left(x^{(0)}\right) = \mathbf{y}^{(0)}, \quad x \in I = [a, b], \ x^{(0)} \in I,$$

wobei $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ stetig ist. Wegen der Stetigkeit beider Seiten der Differentialgleichung kann man diese integrieren und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{y}'(t)\, dt &= \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\, dt \quad \Longrightarrow \\ \mathbf{y}(x) &= \mathbf{y}\left(x^{(0)}\right) + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\, dt. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Dies ist eine Integralgleichung. Jede Lösung des Anfangswertproblems ist Lösung der Integralgleichung und umgekehrt. □

6.3.2 Der Satz von Picard–Lindelöf

Definition 6.40 Lipschitz[3]–Bedingung, Lipschitz–Konstante, Lipschitz–Stetigkeit. Eine Funktion $f(x)$ mit $D(f) = I$ genügt im Intervall $I \subset \mathbb{R}$ einer Lipschitz–Bedingung, falls für alle $x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le L\, |x_1 - x_2|$$

mit einer Konstanten $L \ge 0$ gilt. Diese Konstante wird Lipschitz–Konstante genannt und die Funktion $f(x)$ Lipschitz–stetig. □

[3] Rudolf Lipschitz (1832 – 1903)

Bemerkung 6.41 *Zusammenhang mit anderen Stetigkeitsbegriffen.* Eine Funktion $f(x)$, die in I einer Lipschitz–Bedingung genügt ist in I auch stetig, denn es gilt für alle $x_1, x_2 \in I$

$$\lim_{x_2 \to x_1} |f(x_1) - f(x_2)| \le L \lim_{x_2 \to x_1} |x_1 - x_2| = 0.$$

Allgemein gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{array}{lcl}
f(x) \text{ stetig in } (a,b) & \Longleftarrow & f(x) \text{ stetig in } [a,b] \\
\quad\Uparrow & & \quad\Updownarrow \\
f(x) \text{ gleichmäßig stetig in } (a,b) & \Longleftarrow & f(x) \text{ gleichmäßig stetig in } [a,b] \\
\quad\Uparrow & & \quad\Uparrow \\
f(x) \text{ Lipschitz–stetig in } (a,b) & \Longleftarrow & f(x) \text{ Lipschitz–stetig in } [a,b] \\
 & & \quad\Uparrow \\
f(x) \text{ differenzierbar in } (a,b) & \Longleftarrow & f(x) \text{ differenzierbar in } [a,b] \\
\quad\Downarrow & & \\
f(x) \text{ stetig in } (a,b) & &
\end{array}$$

Einige dieser Beziehungen folgen direkt aus der Definition der Begriffe, andere muss man nachrechnen.

Insgesamt ist Lipschitz–Stetigkeit von $f(x)$ in einem abgeschlossenen Intervall etwas weniger als Differenzierbarkeit, aber mehr als Stetigkeit von $f(x)$. □

Lemma 6.42 Lipschitz–Konstante für stetig differenzierbare Funktionen. *Die Funtion $f(x)$ sein in $[a,b]$ differenzierbar und die Ableitung $f'(x)$ sei in $[a,b]$ beschränkt, das heißt $f \in C^1([a,b])$. Dann erfüllt $f(x)$ in $[a,b]$ eine Lipschitz–Bedingung mit*

$$L = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)| \,.$$

Beweis: mit Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Übungsaufgabe. ■

Definition 6.43 Lipschitz–Bedingung bezüglich von Variablen. Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$ mit $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie im System (6.16). Dann erfüllt $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ eine Lipschitz–Bedingung bezüglich der Variablen $y_1, \ldots, y_n$, falls für alle $(x, y_1, \ldots, y_n)$ und $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ gilt

$$\|\mathbf{f}(x, y_1, \ldots, y_n) - \mathbf{f}(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)\|_\infty \le L \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\|_\infty$$

mit $L \in \mathbb{R}$. □

Lemma 6.44 Lipschitz–Bedingung für stetig differenzierbare Funktionen. *Die Funktion $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ sei stetig differenzierbar nach $y_1, \ldots, y_n$ im Quader*

$$Q := \left\{ (x, \mathbf{y}) \ : \ \left| x - x^{(0)} \right| \le a, \ \left| y_j - y_j^0 \right| \le b, \ j = 1, \ldots n \right\}.$$

Dann erfüllt $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ bezüglich $y_1, \ldots, y_n$ eine Lipschitz–Bedingung.

Beweis: Genauso wie von Lemma 6.42, Übungsaufgabe. ■

Definition 6.45 Kontrahierende oder kontraktive Abbildung. Seien (E, d) ein metrischer Raum, $A \subset E$ eine Teilmenge und $T : A \to E$ eine Abbildung. Die Abbildung wird kontrahierend oder kontraktiv genannt, falls es ein $\kappa \in [0, 1)$ gibt, so dass

$$d(T(x), T(y)) \le \kappa d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in A$$

ist. Der Abstand der Bilder ist also kleiner als der Abstand der Urbilder. □

Satz 6.46 Fixpunktsatz von Banach[4] (1920). *Seien A eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes (E,d) und $T : A \to A$ eine kontrahierende Abbildung von A in sich. Dann gibt es genau einen Fixpunkt $\hat{x} \in A$ mit $T(\hat{x}) = \hat{x}$. Dieser ist der Grenzwert der sukzessiven Approximation*

$$x^{(n+1)} = T\left(x^{(n)}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

mit beliebigem Startwert $x^{(0)} \in A$.

Beweis: Analysis–Vorlesung, Literatur. ■

Satz 6.47 Lokaler Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard[5]–Lindelöf[6]. *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$y_j'(x) = f_j(x, y_1, \ldots, y_n), \quad y_j(x^{(0)}) = y_j^0, \ j = 1, \ldots n, \tag{6.18}$$

auf dem abgeschlossenen und beschränkten (kompakten) Quader

$$Q := \left\{(x, \mathbf{y}) \ : \ \left|x - x^{(0)}\right| \le a, \ \left|y_j - y_j^0\right| \le b, \ j = 1, \ldots n\right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Die Funktion $\mathbf{f} : Q \to \mathbb{R}^n$ sei auf Q stetig und sie genüge einer Lipschitz–Bedingung bezüglich $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\overline{\mathbf{y}})\|_{[C(I)]^n} &= \max_{1\le j\le n} \max_{x \in [x^{(0)}-a, x^{(0)}+a]} |f_j(x,\mathbf{y}(x)) - f_j(x,\overline{\mathbf{y}}(x))| \\
&\le L \max_{1\le j\le n} \max_{x \in [x^{(0)}-a, x^{(0)}+a]} \left|y_j(x) - \overline{y}_j(x)\right| \\
&= L \|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\|_{[C(I)]^n}, \qquad (6.19)
\end{aligned}$$

für alle $(x,\mathbf{y}), (x,\overline{\mathbf{y}}) \in Q$ mit $L \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gibt es eine Zahl $M > 0$, so dass gilt

$$|f_j(x,\mathbf{y})| \le M \quad \text{für alle } (x,\mathbf{y}) \in Q, \ j = 1, \ldots, n. \tag{6.20}$$

Das Anfangswertproblem (6.18) besitzt auf dem Intervall

$$I := [x^{(0)} - a, x^{(0)} + a] \cap [x^{(0)} - c, x^{(0)} + c]$$

mit

$$c := \min\left\{\frac{1}{\alpha L}, \frac{b}{M}\right\} \quad \text{mit} \quad \alpha > 1 \text{ beliebig}, \tag{6.21}$$

genau eine Lösung $\mathbf{y} \in [C^1(I)]^n$. Die sukzessive Approximation

$$\mathbf{y}^{(k+1)}(x) := \mathbf{y}^{(0)}(x) + \int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}^{(k)}(t)\right) \, dt, \quad k = 0,1,\ldots, \quad \mathbf{y}^{(0)}(x) = \mathbf{y}^0, \tag{6.22}$$

konvergiert auf I gegen diese Lösung $\mathbf{y}(x)$.

Beweis: Die Beschränktheit von $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ auf Q folgt nach dem Satz von Weierstraß aus der Stetigkeit von $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ und der Abgeschlossenheit von Q.

Der Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung erfolgt durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes 6.46. Betrachte dazu die Abbildung

$$T\mathbf{y}(x) := \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \, dt, \quad x \in I, \ \mathbf{y} \in [C(I)]^n. \tag{6.23}$$

[4] Stefan Banach (1892 – 1945)
[5] Emile Picard (1856 – 1941)
[6] Ernst Lindelöf (1870 – 1946)

Nach Bemerkung 6.39 folgt, dass ein Fixpunkt dieser Abbildung eine Lösung von (6.18) ist.

Zunächst wird gezeigt, dass das Bild dieser Abbildung eine stetige Funktion ist. Seien $\hat{x}, \tilde{x} \in I$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|T\mathbf{y}(\hat{x}) - T\mathbf{y}(\tilde{x})\|_{[C(I)]^n} &= \left\| \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^{\hat{x}} \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t)\right)\, dt - \mathbf{y}^0 - \int_{x^{(0)}}^{\tilde{x}} \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t)\right)\, dt \right\|_{[C(I)]^n} \\
&= \left\| \int_{\tilde{x}}^{\hat{x}} \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t)\right)\, dt \right\|_{[C(I)]^n} \le \int_{\min\{\tilde{x},\hat{x}\}}^{\max\{\tilde{x},\hat{x}\}} \|\mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t)\right)\|_{[C(I)]^n}\, dt \\
&\le |\hat{x} - \tilde{x}|\, \|\mathbf{f}\left(x, \mathbf{y}(x)\right)\|_{[C(I)]^n} \le M\, |\hat{x} - \tilde{x}|\, ,
\end{aligned}$$

woraus $T\mathbf{y}(\hat{x}) \to T\mathbf{y}(\tilde{x})$ für $\hat{x} \to \tilde{x}$ folgt. Wegen der Stetigkeit von $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ ist das Integral als Funktion der oberen Grenze wohldefiniert und es gilt $(T\mathbf{y})'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$ für alle $x \in I$. Damit ist die Funktion $T\mathbf{y}(x)$ auch differenzierbar. Offenbar gilt $T\mathbf{y}(x^{(0)}) = \mathbf{y}^0$.

Nun wird gezeigt, dass die Abbildung T die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Abgeschlossener Definitionsbereich von T. Betrachte die Menge

$$A := \left\{ \mathbf{y} \in [C(I)]^n \ :\ \left\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^0\right\|_{[C(I)]^n} \le b \text{ für alle } x \in I \right\}.$$

Die Menge $A \neq \emptyset$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des Banach–Raumes $[C(I)]^n$. Dass A eine Teilmenge von $[C(I)]^n$ ist folgt aus der Definition von A. Die Abgeschlossenheit erhält man wie folgt. Sei $\{\mathbf{y}^{(k)}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{y}^{(k)} \in A$, eine konvergente Folge mit Grenzwert $\mathbf{y} \in [C(I)]^n$, das heißt es gilt

$$0 = \lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{y}^{(k)}(x) - \mathbf{y}(x)\right\|_{[C(I)]^n}.$$

Mit Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^0\right\|_{[C(I)]^n} &\le \left\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^{(k)}(x)\right\|_{[C(I)]^n} + \left\|\mathbf{y}^{(k)}(x) - \mathbf{y}^0\right\|_{[C(I)]^n} \\
&\le \left\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^{(k)}(x)\right\|_{[C(I)]^n} + b.
\end{aligned}$$

Bildet man auf beiden Seiten den Grenzwert $k \to \infty$, erhält man

$$\left\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^0\right\|_{[C(I)]^n} \le \lim_{k\to\infty} \left\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^{(k)}(x)\right\|_{[C(I)]^n} + b = b.$$

Dass $\mathbf{y} \in [C(i)]^n$ gilt, wurde im ersten Teil des Beweises gezeigt. Demzufolge ist $\mathbf{y} \in A$.

T ist eine Abbildung von A in sich. Als nächstes wird gezeigt, dass T die abgeschlossene Menge A in sich abbildet, unter der Bedingung, dass (6.21) erfüllt ist. Im ersten Teil des Beweises wurde schon gezeigt, dass das Bild von T aus $[C(i)]^n$ ist. Außerdem gilt

$$\left\|(T\mathbf{y})(x) - \mathbf{y}^0\right\|_{[C(I)]^n} = \left\| \int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{f}\left(t, \mathbf{y}(t)\right)\, dt \right\|_{[C(I)]^n} \le M \left|x - x^{(0)}\right| \le Mc \le b.$$

Also liegt das Bild von T in A.

T ist kontrahierend. Jetzt muss noch gezeigt werden, dass T kontrahierend ist. Seien $\hat{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} \in A$, dann folgt mit der Lipschitz–Stetigkeit in der zweiten Komponente

$$\begin{aligned}
\|(T\hat{\mathbf{y}})(x) - (T\tilde{\mathbf{y}})(x)\|_{[C(I)]^n} &= \left\| \int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}(t)) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}(t))\, dt \right\|_{[C(I)]^n} \\
&\le \int_{x^{(0)}}^{x} \|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}(t)) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}(t))\|_{[C(I)]^n}\, dt \\
&\le L \int_{\min\{x^{(0)},x\}}^{\max\{x^{(0)},x\}} \|\hat{\mathbf{y}}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)\|_{[C(I)]^n}\, dt \\
&\le L \left|x - x^{(0)}\right| \|\hat{\mathbf{y}}(x) - \tilde{\mathbf{y}}(x)\|_{[C(I)]^n} \\
&\le \frac{1}{\alpha} \|\hat{\mathbf{y}}(x) - \tilde{\mathbf{y}}(x)\|_{[C(I)]^n}.
\end{aligned}$$

Wegen $\alpha > 1$ ist die Abbildung damit kontrahierend.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Abbildung besitzt also einen eindeutigen Fixpunkt und die sukzessive Approximation (6.22) konvergiert gegen diesen Fixpunkt. Das der Fixpunkt eine stetig differenzierbare Funktion ist, wurde bereits im ersten Teil des Beweises gezeigt. ■

Bemerkung 6.48 *Zum Satz von Picard–Lindelöf.*

- Die Einzigkeit der Lösung folgt aus der Lipschitz–Bedingung an die rechte Seite, siehe Beispiel 6.49.
- Erhöht man die Grenzen a oder b des Quaders Q, so können die Konstanten L und M höchstens wachsen und das von Satz 6.47 garantierte Existenzintervall einer eindeutigen Lösung kann höchstens kleiner werden. Das von diesem Satz garantierte Intervall ist aber im Allgemeinen nicht das maximale Intervall, siehe Beispiel 6.50.
- Gelten Stetigkeit und Lipschitz–Bedingung gleichmäßig für alle $a, b > 0$, dann kann man eine globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, das heißt im Intervall $[x^{(0)} - a, x^{(0)} + a]$ erwarten, siehe Satz 6.51.

□

Beispiel 6.49 *Nichteindeutigkeit der Lösung bei verletzter Lipschitz–Bedingung.* Betrachte

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}, \quad y(0) = 0.$$

Die Voraussetzungen von Satz 6.47 sind bis auf die Lipschitz–Bedingung erfüllt. Die Funktion $f(y)$ ist in keiner Umgebung von $x^{(0)} = 0$ Lipschitz–stetig. Das obige Problem besitzt unendliche viele in $\mathbb{R}$ definierte Lösungen

$$y_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le \sigma, \\ \left(\dfrac{2}{3}(x-\sigma)\right)^{3/2} & \text{für } x > \sigma, \end{cases}$$

mit $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig, siehe Abbildung 6.4. □

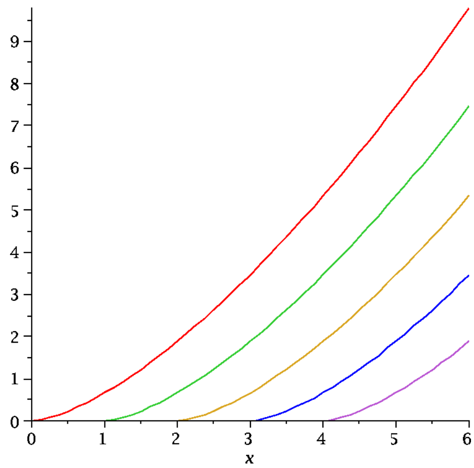


Abbildung 6.4: Lösungen von Beispiel 6.49.

Beispiel 6.50 *Nichtmaximaliät des Existenzintervalls einer eindeutigen Lösung.* Betrachte

$$y'(x) = y^3(x), \quad y(0) = 1,$$

also $f(x,y) = y^3$, $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 1$. Die Voraussetzungen des lokalen Satzes von Picard–Lindelöf, Satz 6.47, sind für jedes $a > 0$ und jedes $b > 0$ erfüllt. Es gelten

$$|f(x,y)| = \left|y^3\right| \quad \Longrightarrow \quad \max_{(x,y)\in Q} |f(x,y)| = \max_{y\in[-b+1,b+1]} \left|y^3\right| = (b+1)^3 = M$$

und

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad L = \max_{y\in[-b+1,b+1]} \left|3y^2\right| = 3(b+1)^2.$$

Nach dem lokalen Existenz– und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf gibt es eine eindeutige Lösung $y \,:\, [-c,c] \to \mathbb{R}$ mit

$$c = \min\left\{\frac{1}{\alpha L}, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{\alpha 3(b+1)^2}, \frac{b}{(b+1)^3}\right\}, \quad \alpha > 1.$$

Der zweite Term nimmt sein Maximum $0.148\overline{148}$ für $b = 1/2$ an, so dass das c aus diesem Satz nicht größer als dieser Wert ist. Die analytische Lösung des Problems ist

$$y(x) = (1-2x)^{-1/2}, \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

Nähert man sich dem Punkt $x = 0.5$, dann kommt es zu einem sogenannten Blow–up, siehe Abbildung 6.5.

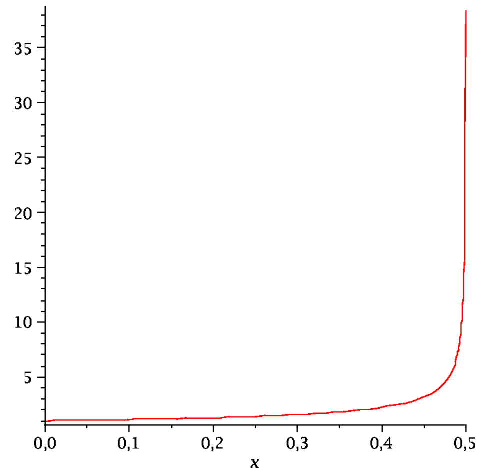


Abbildung 6.5: Maximale Lösung von Beispiel 6.50.

Die Bestimmung des maximalen Definitionsbereiches von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist ein wichtiges Gebiet, auf welches aus Zeitgründen allerdings nicht eingegangen werden kann. □

Satz 6.51 Globaler Existenz– und Eindeutigkeitssatz. *Sei* $\mathbf{f} \,:\, [x^{(0)}-a, x^{(0)}+a] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *stetig und im zweiten Argument gleichmäßig Lipschitz–stetig. Das heißt, es existiert ein* $L > 0$, *so dass für alle* $x \in I := [x^{(0)} - a, x^{(0)} + a]$ *und alle* $\mathbf{y}, \overline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$

$$\left\|\mathbf{f}(x,\mathbf{y}) - \mathbf{f}(x,\overline{\mathbf{y}})\right\|_{[C(I)]^n} \le L \left\|\mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}\right\|_{[C(I)]^n} \tag{6.24}$$

gilt. Dann hat das Anfangswertproblem (6.18) *eine eindeutige Lösung* $\mathbf{y} \in [C^1(I)]^n$.

Beweis: Für Interessenten.

Der Beweis beruht wieder auf dem Banachschen Fixpunktsatz. Man stattet den Raum $[C(I)]^n$ mit der Norm

$$\|\mathbf{y}\|_e := \max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|} \left\|\mathbf{y}(x)\right\|_{[C(I)]^n}\right) \tag{6.25}$$

aus. Man kann zeigen, dass $\|\mathbf{y}\|_e$ und $\|\mathbf{y}\|_{[C(I)]^n}$ äquivalente Normen sind. Demzufolge ist $[C(I)]^n$ ausgestattet mit $\|\mathbf{y}\|_e$ ein Banach–Raum.

Man betrachtet wieder die Abbildung T aus (6.23). Alle Eigenschaften von T, bis auf die Kontraktivität, weist man analog wie im Beweis von Satz 6.47 nach. Zum Beweis der Kontraktivität startet man wie folgt

$$\|T\hat{\mathbf{y}} - T\tilde{\mathbf{y}}\|_e = \max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\left\|\int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{f}(t,\hat{\mathbf{y}}(t)) - \mathbf{f}(t,\tilde{\mathbf{y}}(t))\ dt\right\|_{[C(I)]^n}\right).$$

Wegen des Betrages im Exponenten und wegen der Norm um das Integral kann man an dieser Stelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x > x^{(0)}$ annehmen. Dann erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\|T\hat{\mathbf{y}} - T\tilde{\mathbf{y}}\|_e &\le L\max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\int_{x^{(0)}}^{x}\|\hat{\mathbf{y}}(t)-\tilde{\mathbf{y}}(t)\|_{[C(I)]^n}\ dt\right)\\
&= L\max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\int_{x^{(0)}}^{x} e^{L\left(t-x^{(0)}\right)}e^{-L\left(t-x^{(0)}\right)}\|\hat{\mathbf{y}}(t)-\tilde{\mathbf{y}}(t)\|_{[C(I)]^n}\ dt\right)\\
&\le L\max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\int_{x^{(0)}}^{x} e^{L\left(t-x^{(0)}\right)}\ dt\right)\times\\
&\qquad \max_{t\in[x^{(0)},x]}\left\{e^{-L\left(t-x^{(0)}\right)}\|\hat{\mathbf{y}}(t)-\tilde{\mathbf{y}}(t)\|_{[C(I)]^n}\right\}\\
&= L\max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\int_{x^{(0)}}^{x} e^{L\left(t-x^{(0)}\right)}\ dt\right)\|\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e\\
&= L\max_{x\in I}\left(e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\frac{e^{L\left(x-x^{(0)}\right)}-1}{L}\right)\|\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e\\
&= \max_{x\in I}\left(\left(1-e^{-L\left|x-x^{(0)}\right|}\right)\right)\|\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e\\
&\le \left(1-e^{-L\max_{x\in I}\left|x-x^{(0)}\right|}\right)\|\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e\\
&= \left(1-e^{-La}\right)\|\hat{\mathbf{y}}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Kontraktivität von T, da $\left(1-e^{-La}\right) < 1$ ist. Die Aussage des Satzes folgt nun mit dem Banachschen Fixpunktsatz. ■

Satz 6.52 Stetige Abhängigkeit der Lösung von der Anfangsbedingung. *Seien die Voraussetzungen des globalen Existenz– und Eindeutigkeitssatzes, Satz 6.51, erfüllt. Dann hängt die Lösung* $\mathbf{y}(x)$ *in der Norm* $\|\cdot\|_e$*, definiert in* (6.25)*, stetig vom Anfangswert* $\mathbf{y}^0$ *ab.*

Beweis: Betrachte die Lösungen $\mathbf{y}(x)$ und $\tilde{\mathbf{y}}(x)$ zu den Anfangswerten $\mathbf{y}^0$ und $\tilde{\mathbf{y}}^0$. Man verwendet wieder die Darstellung der Lösungen als Fixpunkt einer Integralgleichung. Dann folgt analog zum Beweis von Satz 6.51

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e &= \left\|\mathbf{y}^0-\tilde{\mathbf{y}}^0+\int_{x^{(0)}}^{x}\left(\mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t))-\mathbf{f}(t,\tilde{\mathbf{y}}(t))\right)\ dt\right\|_e\\
&\le \left\|\mathbf{y}^0-\tilde{\mathbf{y}}^0\right\|_e+\left(1-e^{-La}\right)\|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e,
\end{aligned}$$

also

$$\|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}\|_e \le e^{La}\left\|\mathbf{y}^0-\tilde{\mathbf{y}}^0\right\|_e.$$

Für $\mathbf{y}^0 \to \tilde{\mathbf{y}}^0$ folgt also $\mathbf{y}(x)\to\tilde{\mathbf{y}}(x)$ in $\|\cdot\|_e$. ■

Bemerkung 6.53 *Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.* Neben der stetigen Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert kann man auch die stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite $\mathbf{f}(x,\mathbf{y})$ beweisen (Heuser, 2006, Satz 13.1). Die Abschätzung im Beweis von Satz 6.52 ist dergestalt, dass die Nachbarschaft einer Lösung und einer gestörten Lösung wegen des exponentiellen Faktors ziemlich schlecht sein kann. *Übungsaufgabe mit linearer Dgl.* □

6.3.3 Der Existenzsatz von Peano

Bemerkung 6.54 *Allgemeines.* Dies ist der zweite fundamentale Satz der Theorie von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es wird gezeigt, dass schon die Stetigkeit von $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ für die Existenz einer Lösung ausreicht, allerdings nicht für deren Eindeutigkeit. Da man relativ wenig Voraussetzungen verwendet, wird die verwendete Analysis recht kompliziert. Sie wird hier auch nicht vollständig dargelegt. □

Definition 6.55 Gleichmäßig beschränkte Menge von Funktionen, gleichgradig stetige Menge von Funktionen. Sei $\mathcal{F}$ eine Menge reellwertiger Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktionen $f \in \mathcal{F}$ heißen gleichmäßig beschränkt, falls eine Konstante M existiert, so dass für alle $\mathbf{x} \in D$ und für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$|f(\mathbf{x})| \le M.$$

Die Funktionen aus $\mathcal{F}$ heißen gleichgradig stetig, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_\infty < \delta(\varepsilon)$ folgt

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon$$

für alle $f \in \mathcal{F}$. □

Bemerkung 6.56 *Zur gleichgradigen Stetigkeit.* Gleichgradige Stetigkeit ist gegeben, falls:

- jede Funktion aus $\mathcal{F}$ gleichmäßig stetig ist,
- alle Funktionen kommen bei ihrer gleichmäßigen Stetigkeit mit demselben $\delta(\varepsilon)$ aus.

Gleichgradig stetig heißt also, $\delta(\varepsilon)$ ist unabhängig von $\mathbf{x}$ und $f(\mathbf{x})$. □

Beispiel 6.57 *Gleichgradig stetige Menge.* $\mathcal{F}$ sei die Menge aller Funktionen $f(x)$ welche in $I = [a, b]$ einer Lipschitz–Bedingung mit einheitlicher Lipschitz–Konstanten L genügen

$$|f(x) - f(x')| \le L\,|x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in I,\ f \in \mathcal{F}.$$

Diese Menge ist gleichgradig stetig, wähle $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$. □

Lemma 6.58 Konvergenz einer Funktionenfolge auf einer abzählbaren Menge. *Seien $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Menge, $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ eine Folge reellwertiger Funktionen, $D(f_n) = \mathcal{M}$ und $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ ist auf $\mathcal{M}$ gleichmäßig beschränkt. Dann kann man eine Teilfolge aus $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ auswählen, die für alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ konvergiert.*

Beweis: Für Interessenten.

Sei $\mathcal{M} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$. Betrachte die Zahlenfolge $\{f_n(\mathbf{x}_1)\}_{n\ge1}$. Diese ist nach Voraussetzung beschränkt $|f_n(\mathbf{x}_1)| \le M$ für alle $f_n(\mathbf{x})$. Nach dem Satz von Bolzano[7]–Weierstraß kann man aus jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge auswählen. Diese sei $\{f_n^{(1)}(\mathbf{x}_1)\}_{n\ge1}$. Die Zahlenfolge $\{f_n^{(1)}(\mathbf{x}_2)\}_{n\ge1}$ besitzt mit dem gleichen Argument ebenfalls eine konvergente Teilfolge: $\{f_n^{(2)}(\mathbf{x}_2)\}_{n\ge1}$. Führt man diese Konstruktion weiter, ergibt sich folgendes Bild

$$\begin{array}{lllll}
f_1^{(1)}(\mathbf{x}) & f_2^{(1)}(\mathbf{x}) & f_3^{(1)}(\mathbf{x}) & \ldots & \text{konvergiert für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_1\}, \\
f_1^{(2)}(\mathbf{x}) & f_2^{(2)}(\mathbf{x}) & f_3^{(2)}(\mathbf{x}) & \ldots & \text{konvergiert für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}, \\
f_1^{(3)}(\mathbf{x}) & f_2^{(3)}(\mathbf{x}) & f_3^{(3)}(\mathbf{x}) & \ldots & \text{konvergiert für } \mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}. \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots &
\end{array}$$

[7] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848)

Betrachte nun $g_n(\mathbf{x}) := f_n^{(n)}(\mathbf{x})$ als Teilfolge von $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$. Die Zahlenfolge $\{g_n(\mathbf{x}_i)\}_{n\ge1}$ konvergiert für alle $\mathbf{x}_i$, da die Folgeglieder von $\{g_n(\mathbf{x}_i)\}_{n\ge1}$ bis auf die ersten $(i-1)$ Glieder Teilfolge von $\{f_n^{(n)}(\mathbf{x}_i)\}_{n\ge1}$ sind. Das heißt, $\{g_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ konvergiert für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$. ■

Definition 6.59 Gleichmäßig konvergente Funktionenfolge. Sei $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$, $D(f_n) = I \subset \mathbb{R}^n$, eine konvergente Funktionenfolge mit Grenzwert $f(\mathbf{x})$. Die Funktionenfolge heißt gleichmäßig konvergent, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $\mathbf{x} \in I$ und $n \ge n_0(\varepsilon)$ gilt

$$|f_n(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon.$$

Gleichmäßig heißt, dass $n_0(\varepsilon)$ unabhängig von $\mathbf{x}$ gewählt werden kann. □

Satz 6.60 Satz von Arzelà[8]–Ascoli[9]. *Sei $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenfolge mit kompaktem (abgeschlossen und beschränkt) Definitionsbereich D. Dann kann man aus $\{f_n(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ eine Teilfolge auswählen, die auf D gleichmäßig konvergiert.*

Beweis: Sei $\mathcal{M}$ eine abzählbar dichte Teilmenge von D. Nach Lemma 6.58 existiert eine Teilfolge $\{f_n^*(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$, die für alle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ konvergiert. Es bleibt zu zeigen, dass $\{f_n^*(\mathbf{x})\}_{n\ge1}$ sogar gleichmäßig konvergiert.

Dieser Beweis ist recht technisch. Er beruht auf dem Überdeckungssatz von Heine[10]–Borel[11], siehe Literatur. ■

Satz 6.61 Existenzsatz von Peano[12] *Die Funktion $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ sei stetig auf dem abgeschlossenen und beschränkten (kompakten) Quader*

$$Q := \left\{(x,\mathbf{y}) \ : \ \left|x - x^{(0)}\right| \le a, \ \left|y_j - y_j^0\right| \le b, \ j = 1, \ldots n\right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

sowie durch $M > 0$ beschränkt

$$|f_j(x,\mathbf{y})| \le M \quad \textit{auf} \quad Q, \ j = 1, \ldots, n.$$

Sei

$$c := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},$$

dann gibt es auf $J := [x^{(0)} - c, x^{(0)} + c]$ mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems (6.18).

Beweis: *Idee.* Man konstruiert sich eine geeignete Funktionenfolge, welche die Bedingungen des Satzes von Arzelà–Ascoli erfüllt. Vom Grenzwert einer Teilfolge zeigt man, dass er eine Lösung der Integralgleichung (6.17) ist. Somit ist er auch Lösung des Anfangswertproblems (6.18). Die Details sind für Interessenten.

Konstruktion der Funktionenfolge. Der Beweis wird für $J_r := [x^{(0)}, x^{(0)} + c]$ geführt, für $[x^{(0)} - c, x^{(0)}]$ geht er analog. Es sei Z eine beliebige Zerlegung von J_r in endlich viele Teilintervalle $I_k := [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, m-1$, $x_0 = x^{(0)}$, $x_m = x^{(0)} + c$. Die maximale Länge eines Teilintervalls sei η_Z. Die Menge aller derartigen Zerlegungen wird mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet. Durch

$$\mathbf{y}_Z(x) := \mathbf{y}_Z(x_k) + (x - x_k)\,\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_z(x_k)), \quad \mathbf{y}_z\left(x^{(0)}\right) = \mathbf{y}^0, \quad x \in I_k, \tag{6.26}$$

[8] Cesare Arzelà (1847 – 1912)
[9] Giulio Ascoli (1843 – 1896)
[10] Heinrich Eduard Heine (1828 – 1888)
[11] Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 – 1956)
[12] Giuseppe Peano (1858 – 1932).

$k = 0, 1, \ldots, m-1$ wird sukzessive auf $I_0, \ldots, I_{m-1}$ und damit auf ganz J_r eine von $Z \in \mathcal{Z}$ abhängige stetige Funktion $\mathbf{y}_Z(x)$ definiert. **Bild 1D** Die Funktionen $\mathbf{y}_Z(x)$ sind stückweise lineare Funktionen, Polygonzüge in $\mathbb{R}^n$.

Man kann diese Funktionen auch mit Integralen schreiben. Setze dazu

$$\mathbf{F}_Z(x) = \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_z(x_k)) \quad \text{für} \quad x \in I_k \setminus \{x_{k+1}\}.$$

Das ist eine stückweise konstante Funktion. Aus (6.26) folgt für $x \in I_k$

$$\mathbf{y}_Z(x) = \mathbf{y}_Z(x_k) + \int_{x_k}^{x} \mathbf{F}_Z(t)\, dt.$$

Durch sukzessives Einsetzen in $\mathbf{y}_Z(x_k)$ folgt für $x \in J_r$

$$\mathbf{y}_Z(x) = \mathbf{y}_Z\left(x^{(0)}\right) + \int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{F}_Z(t)\, dt = \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^{x} \mathbf{F}_Z(t)\, dt. \tag{6.27}$$

Wohldefiniertheit und gleichmäßige Beschränktheit der Funktionenmenge. Damit die Folgen $\mathbf{y}_Z(x)$ beziehungsweise $\mathbf{F}_Z(x)$ überhaupt definiert werden können, muss gezeigt werden, dass die dabei verwendeten Argumente im Definitionsbereich von $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ liegen, insbesondere das zweite Argument. Es muss also gezeigt werden, dass die Funktionenmenge $\{\mathbf{y}_Z(x) \ : \ Z \in \mathcal{Z}\}$ in Q definiert ist, das heißt dass gilt

$$\left|y_{Z,j}(x) - y_j^0\right| \le b. \tag{6.28}$$

Dies geschieht induktiv. Nach Voraussetzung gilt $|f_j(x, \mathbf{y})| \le M$ für alle $(x, \mathbf{y}) \in Q$, $j = 1, \ldots, n$, also gilt insbesondere

$$\left|f_j\left(x^{(0)}, \mathbf{y}^0\right)\right| = \left|F_{Z,j}\left(x^{(0)}\right)\right| \le M. \tag{6.29}$$

Aus (6.27) und (6.29) ergibt sich zunächst für $k = 0$ und $x \in I_0$

$$\left|y_{Z,j}(x) - y_j^0\right| \le \left|x - x^{(0)}\right| \left|f_j(x^{(0)}, \mathbf{y}^0)\right| \le \left|x - x^{(0)}\right| M \le cM \le b.$$

Beachte, daraus folgt insbesondere $\left|y_{Z,j}(x_1) - y_j^0\right| \le b$, da $x_1 \in I_0$. Sei nun (6.28) für $x \in I_l$ bewiesen. Dann gilt insbesondere

$$\left|y_{Z,j}(x_k) - y_j^0\right| \le b, \quad k = 0, 1, \ldots, l+1.$$

Damit ist $F_{Z,j}(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, l+1$, wohldefiniert und nach Voraussetzung dem Betrage nach mit M beschränkt. Es folgt nun mit (6.27) für $x \in I_{l+1}$

$$\left|y_{Z,j}(x) - y_j^0\right| = \left|\int_{x^{(0)}}^{x} F_{Z,j}(t)\, dt\right| \le \left|x - x^{(0)}\right| M \le cM \le b.$$

Das zeigt (6.28) für $x \in J_r$. Man erhält also für $x \in J_r$

$$\|\mathbf{y}_Z(x)\|_{[C(I)]^n} \le \left\|\mathbf{y}^0\right\|_{[C(I)]^n} + b.$$

Die Funktionenmenge $\{\mathbf{y}_Z(x) \ : \ Z \in \mathcal{Z}\} \subset \left[C([x^{(0)}, x^{(0)} + c])\right]^n$ ist also gleichmäßig beschränkt.

Gleichgradige Stetigkeit der Funktionenmenge. Wegen (6.27) gilt für eine beliebige positive Zahl ε, für $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / M$ und für $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in J_r$

$$|y_{Z,j}(\overline{x}_2) - y_{Z,j}(\overline{x}_1)| = \left|\int_{\overline{x}_1}^{\overline{x}_2} F_{Z,j}(t)\, dt\right| \le |\overline{x}_2 - \overline{x}_1|\, M \le \delta M = \varepsilon.$$

Die Zahl $\delta(\varepsilon)$ ist dabei von $Z \in \mathcal{Z}$ unabhängig, sie hängt nur von ε und M ab.

Konstruktion einer Lösung. Es sei $\{Z_l\}_{l \ge 1} \subset \mathcal{Z}$ eine Menge ausgezeichneter Zerlegungsfolgen für J_r, das bedeutet, die Länge η_Z des längsten Teilintervalls von Z_l konvergiert gegen Null für $l \to \infty$. Diese Menge definiert eine zugehörige Funktionenfolge

$\{\mathbf{y}_{Z_l}(x)\}_{l\geq 1}$. Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli findet man eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{\mathbf{y}_{Z_l'}(x)\}_{l\geq 1}$. Sei

$$\mathbf{y}^*(x) := \lim_{l\to\infty} \mathbf{y}_{Z_l'}(x) \tag{6.30}$$

der Grenzwert dieser Teilfolge. Aus der Analysis ist bekannt, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist. Da die Funktionen $\mathbf{y}_{Z_l'}(x)$ stetig sind (Polygonzüge), ist somit auch $\mathbf{y}^*(x)$ stetig. Aus (6.27) folgt $\mathbf{y}_{Z_l'}\left(x^{(0)}\right) = \mathbf{y}^0$ für alle l' und somit gilt für den Grenzwert $\mathbf{y}^*\left(x^{(0)}\right) = \mathbf{y}^0$. Jetzt wird gezeigt, dass $\mathbf{y}^*(x)$ eine Lösung von (6.18) ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f(x, \mathbf{y})$ in Q (folgt aus Stetigkeit auf kompakter Menge) gibt es ein $\delta_1 > 0$ so dass

$$\|\mathbf{f}(x_1, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x_2, \mathbf{y}_2)\|_{[C(I)]^n} < \varepsilon, \quad (x_1, \mathbf{y}_1), (x_2, \mathbf{y}_2) \in Q, \tag{6.31}$$

mit $|x_1 - x_2| < \delta_2, \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{[C(I)]^n} < \delta_1$. Wegen der Stetigkeit von $\mathbf{y}^*(x)$ gibt es ein $\delta_2 > 0$, so dass für $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in J_r$ mit $|\overline{x}_1 - \overline{x}_2| < \delta_2$ gilt

$$\|\mathbf{y}^*(\overline{x}_1) - \mathbf{y}^*(\overline{x}_2)\|_{[C(I)]^n} < \frac{\delta_1}{2}.$$

Setze $\delta' := \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$. Sei η_l die größte Länge eines Teilintervalles von $Z_{l'}$, dann gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge ein $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $l \geq l_0$ und $x \in J_r$ gelten

$$\left\|\mathbf{y}_{Z_l'}(x) - \mathbf{y}^*(x)\right\|_{[C(I)]^n} < \delta' \quad \text{und} \quad \eta_l < \delta'.$$

Damit erhält man

$$\left\|\mathbf{y}_{Z_l'}(x_k) - \mathbf{y}^*(x)\right\|_{[C(I)]^n} \leq \left\|\mathbf{y}_{Z_l'}(x_k) - \mathbf{y}^*(x_k)\right\|_{[C(I)]^n} + \|\mathbf{y}^*(x_k) - \mathbf{y}^*(x)\|_{[C(I)]^n} < \delta' + \frac{\delta_1}{2} \leq \delta_1.$$

Außerdem folgt für $x \in [x_k, x_{k+1}]$ und $l \geq l_0$

$$|x - x_k| \leq \eta_l < \delta' \leq \delta_2.$$

Aus (6.31) und den letzten beiden Abschätzungen folgt

$$\|\mathbf{F}_{Z_{l'}}(x) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*(x))\|_{[C(I)]^n} = \left\|\mathbf{f}\left(x_k, \mathbf{y}_{Z_l'}(x_k)\right) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*(x))\right\|_{[C(I)]^n} < \varepsilon.$$

Die Folge $\{\mathbf{F}_{Z_{l'}}(x)\}_{l\geq 1}$ konvergiert daher auf J_r gleichmäßig mit dem Grenzwert $\mathbf{F}(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*(x))$. Aus (6.27) erhält man schließlich für $x \in J_r$

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^*(x) &= \lim_{l\to\infty} \mathbf{y}_{Z_l'}(x) = \mathbf{y}^0 + \lim_{l\to\infty} \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{F}_{Z_{l'}}(t)\, dt = \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^x \lim_{l\to\infty} \mathbf{F}_{Z_{l'}}(t)\, dt \\
&= \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t))\, dt.
\end{aligned}$$

Integration und Grenzwertbildung dürfen wegen der gleichmäßigen Konvergenz vertauscht werden. Nach Bemerkung 6.39 ist $\mathbf{y}^*(x)$ eine Lösung von (6.18). Da $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ und $\mathbf{y}^*(x)$ stetig sind, definiert das Integral eine stetig differenzierbare Funktion, also ist auch $(\mathbf{y}^*)'(x)$ stetig. ■

Bemerkung 6.62 *Zusammenfassung der Grundzüge des Beweises.* Der Beweis des Satzes von Peano betrachtet die Integralform des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}\left(x^{(0)}\right) + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\, dt.$$

Man:
- betrachtet eine Zerlegung Z von J,
- approximiert den Integranden durch die stückweise konstante Funktion $\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_Z(x_k))$,

- erhält damit eine stetige, stückweise linear Approximation $\mathbf{y}_Z(x)$ der Lösung.

Man zeigt im Grenzprozess immer feiner werdender Zerlegungen, dass eine Teilfolge der stetigen, stückweise linearen Approximationen gegen eine Lösung der Integralgleichung konvergiert. Die Analyse dieses Grenzprozesses ist mathematisch nicht trivial. □

Bemerkung 6.63 *Eulersches Polygonzugverfahren.* Im Falle der Eindeutigkeit der Lösung von (6.18) stellt jeder der im Beweis konstruierten Polygonzüge eine Approximation der Lösung dar. Dieses Verfahren wird Eulersches Polygonzugverfahren oder explizites Euler–Verfahren oder Vorwärts–Euler–Verfahren genannt. □

Folgerung 6.64 Existenz der Lösung des Anfangswertproblems zur Riccatischen Differentialgleichung. *Betrachte das Anfangswertproblem zur Riccatischen Differentialgleichung* (6.13) *mit dem Anfangswert* $y(x^{(0)}) = y^0$, $x^{(0)} \in [a, b]$. *Seien die Funktion* $f_i \in C([a, b])$, $i \in \{0, 1, 2\}$, $f_0(x) \not\equiv 0$. *Dann besitzt das Anfangswertproblem zu* (6.13) *eine lokale Lösung.*

Beweis: Unter den gemachten Voraussetzungen ist die rechte Seite der Riccatischen Differentialgleichung stetig. Damit folgt die Aussage unmittelbar aus dem Existenzsatz von Peano. ■

Bemerkung 6.65 *Andere Beweise des Existenzsatzes von Peano.* Man kann den Existenzsatz von Peano auch mit Hilfe des Schauder[13]schen Fixpunktsatzes beweisen. Dieser sichert die Existenz, jedoch nicht die Eindeutigkeit eines Fixpunktes der Fixpunktgleichung (6.23). Man braucht auch den Satz von Arzelà–Ascoli und zusätzlich einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, siehe Emmrich, Anhang 2. Der Beweis mit Schauderschem Fixpunktsatz ist nicht konstruktiv. □

Bemerkung 6.66 *Zu weiteren Existenz– und Eindeutigkeitsaussagen.* Neben den beiden grundlegenden Existenz– und Eindeutigkeitsaussagen gibt es noch weitere. Ist beispielsweise die rechte Seite der Differentialgleichung in eine Potenzreihe entwickelbar, dann kann man zeigen, dass es in einer Umgebung des Anfangswertes genau eine Lösung gibt, die sich als absolut konvergente Potenzreihe darstellen lässt, Satz von Cauchy. □

6.4 Allgemeines zu numerischen Verfahren für Anfangswertprobleme

Bemerkung 6.67 *Inhalt.* In diesem Teil werden grundlegende Verfahren vorgestellt, mit denen man die Lösung für ein explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

numerisch approximieren kann.

Der einfacheren Darstellung wegen werden meist sogar nur Anfangswertprobleme von skalaren Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \tag{6.32}$$

betrachtet. Die Erweiterung der Aussagen auf Systeme ist im Allgemeinen unkompliziert. □

[13] Juliusz Pawel Schauder (1899 – 1943)

Bemerkung 6.68 *Das explizite Euler–Verfahren.* Dabei handelt es sich um das einfachste numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dieses Verfahren wurde schon beim Beweis des Satzes von Peano verwendet, siehe Bemerkung 6.63. Es wird auch Vorwärts–Euler–Verfahren oder Eulersches Polygonzugverfahren genannt. Dieses Verfahren wurde bereits in CoMa 2 eingeführt.

Betrachte das Anfangswertproblem (6.32) im Intervall $[x_0, x_e]$. Dieses Intervall wird in N gleichlange (der Einfachheit halber) Teilintervalle zerlegt. Damit erhält man ein Gitter auf $[x_0, x_e]$ und $h = (x_e - x_0)/N$ wird Gitterweite genannt. Die Knoten des Gitters werden durchnumeriert $x_0, x_1, \ldots, x_N = x_e$. **Bild**

Man betrachtet die zu (6.32) äquivalente Integralgleichung, siehe Bemerkung 6.39,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

Nun ist man zunächst an einer Approximation der Lösung im Gitterpunkt x_1 interessiert. Es gilt

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t))\, dt.$$

Der Wert des Integrals wird nun auf grobe Weise approximiert: Integrand an der unteren Integrationsgrenze mal Länge des Intervalls. Man erhält

$$y_1 = y_0 + f\left(x_0, y(x_0)\right)(x_1 - x_0) = y_0 + hf\left(x_0, y_0\right).$$

Das ist eine Näherung für $y(x_1)$. Die Schreibweise ist wie folgt:

- Lösung von (6.32): $y(x_k)$,
- numerische Approximation: y_k.

Nun kann man, startend von y_1, eine Näherung y_2 von $y(x_2)$ auf dieselbe Art und Weise berechnen. Damit erhält man das explizite Euler–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right), \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = y(x_0). \tag{6.33}$$

□

Beispiel 6.69 *Das explizite Euler–Verfahren.* Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(x) = x, \quad y(x_0 = 0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Nimmt man als Stützstellen $x_k = k/10$, $k = 0, \ldots, 10$, das heißt $h = 1/10$, so erhält man mit dem expliziten Euler–Verfahren

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & y_0 + hf\left(x_0, y_0\right) = 1 + 0 = 1 \\ y_2 & = & y_1 + hf\left(x_1, y_1\right) = 1 + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{10} = 1.01 \\ & \vdots & \\ y_{10} & = & y_9 + hf\left(x_9, y_9\right) = 1.45. \end{array}$$

Die analytische Lösung $y = x^2/2 + 1$ hat im Punkt $x = 1$ den Wert 1.5, der Fehler ist also 0.05.

Mit dem feineren Gitter $h = 1/100$ erhält man $y_{100} = 1.495$, der Fehler ist also nur noch 0.005. **Matlabdemo** □

Bemerkung 6.70 *Aufgaben der Numerischen Mathematik.* Die Numerische Mathematik von Anfangswertproblemen beschäftigt sich mit folgenden Aufgaben und Fragestellungen:

- Konstruktion von Verfahren zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.
- Welche Bedingungen muss die rechte Seite $f(x, y(x))$ in (6.32) erfüllen, damit ein Verfahren funktioniert?
- Welchen Einfluss hat eine Veränderung der Gitterweite h auf die Genauigkeit von Verfahren?
- Wie kann man sinnvoll nichtkonstante Gitterweiten wählen?
- ...

□

Definition 6.71 Ljapunov[14]–Stabilität. Sei I eine beschränkte Menge. Betrachte das gestörte Problem

$$z'(x) = f(x, z(x)) + \delta(x),\ x \in I, \quad z(x_0) = y_0 + \delta_0.$$

Das Problem (6.32) heißt stabil im Sinne von Ljapunov auf I, falls für alle Störungen mit

$$|\delta_0| < \varepsilon, \quad |\delta(x)| < \varepsilon \ \text{ für alle } x \in I,$$

und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so dass das gestörte Problem eine eindeutige Lösung besitzt, ein $C > 0$ existiert, welches unabhängig von ε ist, so dass

$$|y(x) - z(x)| \le C\varepsilon \quad \forall\, x \in I.$$

Ist I nicht nach oben beschränkt, nennt man (6.32) asymptotisch stabil, falls (6.32) Ljapunov–stabil in jedem beschränkten Teilintervall ist und außerdem gilt

$$\lim_{x\to\infty} |y(x) - z(x)| = 0.$$

□

Lemma 6.72 Lemma von Gronwall[15]. *Sei $p(x)$ eine integrierbare Funktion, die im Intervall $(x_0, x_0 + X)$ nichtnegativ ist. Weiter seien $g(x)$ und $\phi(x)$ zwei stetige Funktionen auf $[x_0, x_0 + X]$, wobei $g(x)$ nicht fällt. Falls die Ungleichung*

$$\phi(x) \le g(x) + \int_{x_0}^{x} p(s)\phi(s)\ ds, \quad \forall\, x \in [x_0, x_0 + X]$$

erfüllt ist, dann gilt

$$\phi(x) \le g(x) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\ ds\right) \quad \forall\, x \in [x_0, x_0 + X].$$

Beweis: Literatur, *Übungsaufgabe ?* ■

Satz 6.73 Hinreichende Bedingung für Ljapunov–Stabilität. *Betrachte das Anfangswertproblem (6.32), wobei die rechte Seite gleichmäßig Lipschitz–stetig bezüglich y ist mit einer Lipschitz–Konstante $L \ge 0$. Dann ist (6.32) Ljapunov–stabil.*

Beweis: Sei $w(x) = z(x) - y(x)$. Diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung

$$w'(x) = z'(x) - y'(x) = f(x, z(x)) - f(x, y(x)) + \delta(x).$$

[14] Alexander Michailowitsch Ljapunov (1857 – 1918)
[15] Thomas Hakon Gronwall (1877 – 1932)

Integration in $[x_0, x]$ ergibt

$$
\begin{aligned}
w(x) &= w(x_0) + \int_{x_0}^{x} \Big(f(s, z(s)) - f(s, y(s)) \Big)\, ds + \int_{x_0}^{x} \delta(s)\, ds \\
&= \delta_0 + \int_{x_0}^{x} \Big(f(s, z(s)) - f(s, y(s)) \Big)\, ds + \int_{x_0}^{x} \delta(s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt mit Dreiecksungleichung und der Lipschitz–Stetigkeit

$$
\begin{aligned}
|w(x)| &\le |\delta_0| + \int_{x_0}^{x} |f(s, z(s)) - f(s, y(s))|\, ds + \int_{x_0}^{x} |\delta(s)|\, ds \\
&\le \varepsilon + \int_{x_0}^{x} L\, |z(s) - y(s)|\, ds + \int_{x_0}^{x} \varepsilon\, ds \\
&= (1 + |x - x_0|)\, \varepsilon + L \int_{x_0}^{x} |w(s)|\, ds.
\end{aligned}
$$

Mit dem Gronwall–Lemma folgt

$$
|w(x)| \le (1 + |x - x_0|)\, \varepsilon \exp\left(L \int_{x_0}^{x} ds \right) = (1 + |x - x_0|)\, e^{L|x - x_0|} \varepsilon.
$$

Damit ist die Ungleichung der Ljapunov–Stabilität mit $C = (1 + |x - x_0|)\, e^{L|x-x_0|}$ gezeigt. ■

Bemerkung 6.74 *Zur Ljapunov–Stabilität.* Offenbar gilt bei der eben bewiesenen Ljapunov–Stabilität nicht $\lim_{x\to\infty} |w(x)| = 0$, so dass keine asymptotische Stabilität vorliegt. Die Konstante der Ljapunov–Stabilität kann wegen des exponentiellen Faktors schon für kleine Werte $|x - x_0|$ sehr groß sein. □

6.5 Einschrittverfahren

6.5.1 Allgemeines

Definition 6.75 Gitter, Schrittweite. Eine Zerlegung I_h des Interval $I = [x_0, x_e]$

$$
I_h = \{x_0, x_1, \ldots, x_N = x_e\}
$$

mit $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ wird Gitter genannt. Dabei sind $h_k = x_{k+1} - x_k$ die Schrittweiten. □

Definition 6.76 Explizites und implizites Verfahren. Ein numerisches Verfahren zur Lösung von (6.32) auf einem Gitter I_h wird explizit genannt, falls die Näherung y_{k+1} in x_{k+1} sich direkt durch bereits berechnete Werte y_i, $i < k$, berechnen lässt. Anderenfalls heißt das Verfahren implizit. Implizite Verfahren benötigen in jedem Schritt die Lösung einer im allgemeinen nichtlinearen Gleichung zur Berechnung von y_{k+1}. □

Definition 6.77 Einschrittverfahren, Verfahrensfunktion. Ein Einschrittverfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung y_{k+1} von (6.32) auf einem Gitter I_h hat die Gestalt

$$
y_{k+1} = y_k + h_k \Phi\,(x, y, h_k)\,, \ k = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = y(x_0). \tag{6.34}
$$

Hierbei wird $\Phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ die Verfahrensfunktion oder die Zuwachsfunktion des Einschrittverfahrens genannt. □

Beispiel 6.78 *Einschrittverfahren, Verfahrensfunktion.* Das explizite Euler–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(x_k, y_k), \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = y(x_0),$$

ist ein explizites Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y, h_k) = f(x_k, y_k).$$

Das implizite Euler–Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(x_{k+1}, y_{k+1}), \ k = 0, 1, 2, \ldots, \quad y_0 = y(x_0),$$

ist ein implizites Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y, h_k) = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Zur Berechnung von y_{k+1} muss man bei diesem Verfahren eine Gleichung lösen. Wie kompliziert das ist, hängt von der Funktion $f(x, y)$ ab. □

6.5.2 Konsistenz und Konvergenz expliziter Einschrittverfahren

Bemerkung 6.79 *Darstellung impliziter Einschrittverfahren.* Explizite Einschrittverfahren besitzen eine Verfahrensfunktion der Gestalt $\Phi(x_k, y_k, h_k)$. Für die Betrachtungen dieses Kapitels kann man sich auf den Standpunkt stellen, dass auch implizite Einschrittverfahren als explizite Einschrittverfahren geschrieben werden können, bei denen man jedoch im Allgemeinen die Verfahrensfunktion nicht kennt. □

Definition 6.80 Lokaler Fehler. Sei $\hat{y}_{k+1}$ das Resultat eines Schrittes mit dem expliziten Einschrittverfahren (6.34) mit dem Startwert auf der Lösung $y(x)$, das heißt

$$\hat{y}_{k+1} = y(x_k) + h_k \Phi(x_k, y(x_k), h_k).$$

Dann heißt

$$\mathrm{le}(x_{k+1}) = \mathrm{le}_{k+1} = y(x_{k+1}) - \hat{y}_{k+1}$$

lokaler Fehler (local error). **Bild** □

Bemerkung 6.81 *Zum lokalen Fehler.* In der Literatur wird zum Teil auch

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h_k} - \Phi(x_k, y(x_k), h_k)$$

als lokaler Fehler bezeichnet.

Für ein brauchbares Verfahren wird man fordern, dass der lokale Fehler in einem geeigneten Sinne klein ist. □

Definition 6.82 Konsistentes Verfahren. Seien $y(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems (6.32), $h_{\max} = \max_k h_k$ und

$$S := \{(x, y) \ : \ x \in [x_0, x_e], \ y \in \mathbb{R}\}.$$

Dann heißt das Einschrittverfahren (6.34) konsistent, wenn für alle $f \in C(S)$, die in S einer Lipschitz–Bedingung bezüglich y genügen, gilt

$$\lim_{h_{\max} \to 0} \left(\max_{x_k \in I_h} \frac{|\mathrm{le}(x_{k+1})|}{h_k} \right) = 0$$

oder

$$\lim_{h_{\max}\to 0}\left(\max_{x_k\in I_h}|f(x_k,y(x_k))-\Phi(x_k,y(x_k),h_k)|\right)=0.$$

Beide Bedingungen sind äquivalent. *Übungsaufgabe* □

Bemerkung 6.83 *Approximation der Ableitung durch Verfahrensfunktion.* Dass der lokale Fehler für $h_{\max} \to 0$ gegen Null konvergiert ist für jede beschränkte Verfahrensfunktion klar, da in diesem Fall $h_K \to 0$ und $\hat{y}_{k+1} \to y(x_k)$. Konsistenz verlangt mehr, nämlich dass die Verfahrensfunktion die Ableitung hinreichend gut approximiert

$$\frac{\mathrm{le}\,(x_{k+1})}{h_k}=\frac{y\,(x_{k+1})-y(x_k)}{h_k}-\Phi\,(x_k,y(x_k),h_k)\approx y'(x_k)-\Phi\,(x_k,y(x_k),h_k)\,.$$

□

Beispiel 6.84 *Konsistenz des explizites Euler–Verfahrens.* Im expliziten Euler–Verfahren gilt $\Phi\,(x_k,y(x_k),h_k) = f\,(x_k,y(x_k))$. Damit ist die zweite Bedingung aus Definition 6.82 offensichtlich erfüllt und das Verfahren ist konsistent. □

Bemerkung 6.85 *Approximationsgüte der Verfahrensfunktion.* Für praktische Belange ist nicht nur die Konsistenz, sondern auch die Güte der Approximation der Ableitung durch die Verfahrensfunktion wesentlich. Dies gestattet den Vergleich verschiedener Einschrittverfahren. Der einfacheren Darstellung halber sei nun $h_k = h$ für alle k. □

Definition 6.86 Konsistenzordnung. Ein explizites Einschrittverfahren (6.34) besitzt die Konsistenzordnung $p \in \mathbb{N}$, wenn p die größte natürliche Zahl ist, so dass für jede Funktion $f \in C(S)$, die bezüglich y einer Lipschitz–Bedingung genügt, gilt

$$|\mathrm{le}\,(x_k+h)|\le ch^{p+1}$$

für alle $x_k \in I_h$, für alle I_h mit $h \in (0,H]$, mit einer von h unabhängigen Konstante $c > 0$. Die Konstante c kann von Ableitungen der Funktion $y(x)$, von $f(x,y)$ und von partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ abhängen. □

Beispiel 6.87 *Konsistenzordnung des expliziten Euler–Verfahrens.* Betrachte wieder das explizite Euler–Verfahren und nehme an, dass die Funktion $y(x)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Dann folgt mit Hilfe der Taylor–Entwicklung und der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
|\mathrm{le}\,(x_k+h)| &= |y(x_k+h)-\hat{y}_{k+1}| \\
&= |y(x_k)+hy'(x_k)+\frac{h^2}{2}y''(x_k+\theta h)-y(x_k)-h\underbrace{f\,(x_k,y(x_k))}_{=y'(x_k)}| \\
&= \frac{h^2}{2}\,|y''(x_k+\theta h)|\le\frac{h^2}{2}\,\|y\|_{C^2([x_0,x_e])}\,,
\end{aligned}$$

mit $\theta \in (0,1)$. Das Verfahren hat damit die Konsistenzordnung 1. □

Bemerkung 6.88 *Konsistenz und Konvergenz.* Die Konsistenz ist eine lokale Eigenschaft eines Einschrittverfahrens. Für praktische Belange ist jedoch die Frage wichtig, ob die numerisch berechnete Lösung gegen die analytische Lösung der Differentialgleichung konvergiert, wenn man das Gitter immer mehr verfeinert. Die Geschwindigkeit der Konvergenz ist natürlich ebenso wichtig.

Es wird sich zeigen, dass unter bestimmten Bedingungen aus der Konsistenz eines Einschrittverfahrens dessen Konvergenz folgt. Dabei ist die Konvergenzordnung gleich der Konsistenzordnung. □

Definition 6.89 Konvergentes Verfahren, Konvergenzordnung. Ein Einschrittverfahren (6.34) heißt konvergent für das Anfangswertproblem (6.32) auf dem Intervall $I = [x_0, x_e]$, wenn für jede Folge von Gittern $\{I_h\}$ mit $h_{\max} = \max_{h_k \in I_h} h_k \to 0$ für den globalen Fehler

$$e(x_k, h) = y(x_k) - y_k, \quad x_k \in I_h,$$

gilt

$$\max_{x_k \in I_h} |e(x_k, h)| \to 0 \quad \text{für} \quad h_{\max} \to 0.$$

Das Einschrittverfahren besitzt die Konvergenzordnung p^*, wenn p^* die größte natürliche Zahl ist, so dass für alle Schrittweiten $h_{\max} \in (0, H]$ gilt

$$|e(x_k, h)| \le c h_{\max}^{p^*} \quad \forall\, x_k \in I_h,$$

wobei $c > 0$ unabhängig von $h_{\max}$ ist. □

Lemma 6.90 Abschätzung für Folge reeller Zahlen. *Gelten für reelle Zahlen x_n, $n = 0, 1, \ldots$, die Ungleichungen*

$$|x_{n+1}| \le (1 + \delta) |x_n| + \beta$$

mit Konstanten $\delta > 0$, $\beta \ge 0$, so gilt

$$|x_n| \le e^{n\delta} |x_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \beta, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Beweis: Mit vollständiger Induktion, Übungsaufgabe. ■

Satz 6.91 Zusammenhang Konsistenz und Konvergenz. *Sei $y(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems (6.32) mit $f \in C(S)$. Des Weiteren genüge die Verfahrensfunktion in der zweiten Komponente einer Lipschitz–Bedingung*

$$|\Phi(x, y_1, h) - \Phi(x, y_2, h)| \le M |y_1 - y_2| \quad \forall\, (x, y) \in S,\ h \in (0, H].$$

Ferner gelte für den lokalen Fehler die Abschätzung

$$|\mathrm{le}\,(x_k + h)| \le c h^{p+1} \quad \forall\, x \in I_h, h \in (0, H]$$

und es sei $y_0 = y(x_0)$.

Dann gilt für den globalen Fehler

$$|e(x_{k+1}, h)| \le c \frac{e^{M(x_{k+1} - x_0)} - 1}{M} h^p,$$

wobei c unabhängig von h ist.

Beweis: Es gelten

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\Phi\,(x_k, y_k, h)\,, \\ y(x_{k+1}) &= y(x_k) + h\Phi\,(x_k, y(x_k), h) + \mathrm{le}\,(x_{k+1})\,, \quad k = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung und mit der Lipschitz–Bedingung an die Verfahrensfunktion

$$\begin{aligned} |e(x_{k+1}, h)| &= |y(x_{k+1}) - y_{k+1}| \\ &= \big|y(x_k) - y_k + \mathrm{le}\,(x_{k+1}) + h\big(\Phi\,(x_k, y(x_k), h) - \Phi\,(x_k, y_k, h)\,\big)\big| \\ &= \big|e(x_k, h) + \mathrm{le}\,(x_{k+1}) + h\big(\Phi\,(x_k, y(x_k), h) - \Phi\,(x_k, y_k, h)\,\big)\big| \\ &\le |e(x_k, h)| + |\mathrm{le}\,(x_{k+1})| + h\,|\Phi\,(x_k, y(x_k), h) - \Phi\,(x_k, y_k, h)| \\ &\le |e(x_k, h)| + c h^{p+1} + hM\,|y(x_k) - y_k| \\ &= (1 + hM)\,|e(x_k, h)| + c h^{p+1}. \end{aligned}$$

Damit hat man eine Ungleichungskette der Form, wie sie in Lemma 6.90 betrachtet wurde. Man erhält mit $e(x_0) = 0$

$$|e(x_{k+1}, h)| \le e^{(k+1)hM} |e(x_0)| + c\frac{e^{(k+1)hM} - 1}{hM} h^{p+1} = c\frac{e^{M\left(x_{k+1}-x_0\right)} - 1}{M} h^p.$$

■

Bemerkung 6.92 *Zu Satz 6.91.*

- Die Betrachtung einer konstanten Schrittweite war nur der Einfachheit halber. Die Aussage des Satzes lässt sich auf nicht–konstante Schrittweiten ausdehnen. Dann setzt man $h = \max_k h_k$.
- Das Einschrittverfahren liefert eine Näherung y_k für die Lösung in den Gitterpunkten x_k, $k = 0, 1, \ldots, N$. Damit man besser mit der analytischen Lösung vergleichen kann, verbindet man diese Punkte mit Geradenstücken von (x_k, y_k) nach (x_{k+1}, y_{k+1}). Damit erhält man eine stückweise lineare Näherung der Lösung, die auf $[x_0, x_e]$ definiert ist. Diese Funktion wird $y^h(x)$ genannt. Die obigen Betrachtungen lassen sich auf diese Funktion $y^h(x)$ ausdehnen.

□

6.5.3 Runge–Kutta–Verfahren

Bemerkung 6.93 *Grundidee.* Die Euler–Verfahren sind nur Verfahren erster Ordnung. Die Grundidee von Runge[16]–Kutta[17]–Verfahren besteht darin, die Verfahrensfunktion $\Phi(x, y, h)$ durch eine Linearkombination von Werten von $f(x, y)$ in diskreten Punkten anzusetzen. Man erhält dadurch Verfahren höherer Ordnung für den Preis, dass man mehr Funktionswerte berechnen muss.

Das kann man gut an der zum Anfangswertproblem (6.32) äquivalenten Integralgleichung illustrieren. Hänge der Einfachheit halber die rechte Seite von (6.32) nur von x ab, dann hat die zu (6.32) gehörende Integralgleichung die Gestalt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\ dt. \tag{6.35}$$

Die Idee der Runge–Kutta–Verfahren besteht nun darin, das Integral auf der rechten Seite durch eine Quadraturformel zu approximieren, etwa im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ durch

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\ dt \approx h_k \sum_{j=1}^{s} b_j f\left(x_k + c_j h_k\right)$$

mit den Gewichten b_j und den Knoten $x_k + c_j h$.

Im Weiteren wird der Einfachheit halber $h_k = h$ für alle k betrachtet. □

Definition 6.94 Runge–Kutta–Verfahren, Steigungen, Stufen. Ein Runge–Kutta–Verfahren hat die Gestalt

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x, y, h),\ k = 0, 1, \ldots, \quad y_0 = y(x_0),$$

wobei die Verfahrensfunktion mit Hilfe der Größen

$$K_i(x, y) = f\left(x + c_i h, y + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} K_j(x, y)\right)$$

[16] Carle David Tolmé Runge (1856 – 1927)
[17] Martin Kutta (1867 – 1944)

durch

$$\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{s} b_i K_i(x,y)$$

definiert ist, mit $c_1, \ldots, c_s, b_1, \ldots, b_s, a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = 1,\ldots,s$. Die Größen $K_i(x,y)$, $i = 1,\ldots,s$, werden Steigungen genannt. Die Zahl $s \in \mathbb{N}$ ist die Anzahl der Stufen des Verfahrens. □

Bemerkung 6.95 *Butcher*[18]*–Schema.* Der besseren Übersichtlichkeit halber schreibt man Runge–Kutta–Verfahren im Allgemeinen in einem Parameterschema, dem sogenannten Butcher–Schema

$$\begin{array}{c|ccccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}. \tag{6.36}$$

Dabei werden $\mathbf{c}$ Knotenvektor, A Verfahrensmatrix und $\mathbf{b}$ Gewichtsvektor genannt. □

6.5.4 Explizite Runge–Kutta–Verfahren

Bemerkung 6.96 *Steigungen und Butcher–Schema.* Bei expliziten Runge–Kutta–Verfahren können die Steigungen nacheinander berechnet werden

$$\begin{aligned} K_1(x,y) &= f(x_k, y_k), \\ K_2(x,y) &= f\left(x_k + c_2 h, y_k + h a_{21} K_1(x,y)\right), \\ &\vdots \\ K_s(x,y) &= f\left(x_k + c_s h, y_k + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} K_j(x,y)\right). \end{aligned}$$

Das Butcher–Schema besitzt die Gestalt

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array}.$$

□

Beispiel 6.97 *Explizites Euler–Verfahren.* Das explizite Euler–Verfahren ist ein explizites Runge–Kutta–Verfahren mit dem Butcher–Schema

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}.$$

In der Integralgleichung wird die Approximation

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))\, dt \approx h f\left(x_k, y_k(x_k)\right)$$

verwendet, siehe auch Beweis des Satzes von Peano, Satz 6.61. □

[18] John C. Butcher, geb. 1933

Satz 6.98 Konsistenz expliziter Runge–Kutta–Verfahren. *Sei $f \in C(S)$, siehe Definition 6.82. Ein explizites Runge–Kutta–Verfahren ist genau dann konsistent, wenn*

$$\sum_{i=1}^{s} b_i = 1. \tag{6.37}$$

Beweis: Wegen der Stetigkeit von $f(x, y)$ gilt

$$\lim_{h \to 0} K_i(x, y) = f(x_k, y(x_k)), \quad \forall\ (x, y) \in S,\ i = 1, \ldots, s,$$

für den Fall, dass man den exakten Startwert $y_k = y(x_k)$ hat. Damit folgt wegen der Stetigkeit des Betrages

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \left| f(x_k, y(x_k)) - \Phi\left(x_k, y(x_k), h_k\right) \right| &= \lim_{h \to 0} \left| f(x_k, y(x_k)) - \sum_{i=1}^{s} b_i K_i(x, y) \right| \\
&= \left| f(x_k, y(x_k)) - \sum_{i=1}^{s} b_i \lim_{h \to 0} K_i(x, y) \right| \\
&= \left| f(x_k, y(x_k)) \left(1 - \sum_{i=1}^{s} b_i \right) \right| = 0
\end{aligned}$$

genau dann, wenn $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$. Somit ist die zweite Bedingung von Definition 6.82 erfüllt.

■

Satz 6.99 Interpretation der Steigungen. *Gelte $y \in C^2([x_0, x_e])$ für die Lösung von* (6.32) *und sei $f \in C(S)$ sowie in der zweiten Komponente Lipschitz–stetig. Gilt*

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad i \geq 2, \tag{6.38}$$

so ist $K_i(x, y)$ eine Approximation von mindestens 1. Ordnung an $y'(x + c_i h)$ im Falle $y_k = y(x_k)$, das heißt

$$y'(x_k + c_i h) - K_i(x, y) = \mathcal{O}\left(h^2\right).$$

Beweis: Der Beweis erfolgt induktiv.

$i = 2$. Für $i = 2$ folgt mit Hilfe von (6.32), der Lipschitz–Stetigkeit und der Taylor–Entwicklung

$$\begin{aligned}
&\left| y'(x_k + c_2 h) - K_2(x, y) \right| \\
&\quad = \left| f\left(x_k + c_2 h, y(x_k + c_2 h)\right) - f\left(x_k + c_2 h, y(x_k) + h a_{21} f(x_k, y(x_k))\right) \right| \\
&\quad \leq L \left| y(x_k + c_2 h) - y(x_k) - h a_{21} f(x_k, y(x_k)) \right| \\
&\quad = L \left| y(x_k) + c_2 h y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) - y(x_k) - h a_{21} y'(x_k) \right| \\
&\quad = L \left| (c_2 - a_{21}) h y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) \right|.
\end{aligned}$$

Für $c_2 = a_{21}$ ist der Fehler von Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$.

$i > 2$. Seien die Fehlerordnungen für alle Indizes $2, \ldots, i-1$ bewiesen. Dann folgt auf dem gleichen Weg wie für die Induktionsvoraussetzung

$$
\begin{aligned}
& \left|y'(x_k+c_ih) - K_i(x,y)\right| \\
= & \left| f\left(x_k+c_ih, y(x_k+c_ih)\right) - f\left(x_k+c_ih, y(x_k) + h\sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}K_j(x,y)\right)\right| \\
\le & L\left| y(x_k+c_ih) - y(x_k) - h\sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}K_j(x,y)\right| \\
= & L\left| y(x_k) + c_ihy'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) - y(x_k) - h\sum_{j=i}^{i-1}\left(a_{ij}\left(y'(x_k+c_jh) + \mathcal{O}(h^2)\right)\right)\right| \\
= & L\left| c_ihy'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) - h\sum_{j=i}^{i-1}\left(a_{ij}\left(y'(x_k) + \mathcal{O}(h)\right)\right)\right| \\
= & L\left| h\left(c_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}\right)y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2)\right|.
\end{aligned}
$$

Die Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ erhält man, wenn $c_i = \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}$ gilt. ■

Bemerkung 6.100 *Bedingungen an Koeffizienten für gewisse Konsistenzordnungen.* Für viele explizite Runge–Kutta–Verfahren sind die Bedingungen aus den Sätzen 6.98 und 6.99 erfüllt. Das Ziel besteht nun darin, die Koeffizienten $b_1, \ldots, b_s$ und a_{ij} so zu bestimmen, dass das Runge–Kutta–Verfahren eine möglichst hohe Konsistenzordnung besitzt. Die Konsistenzordnung eines s–stufigen Runge–Kutta–Verfahrens kann aus der Taylor–Entwicklung des lokalen Fehlers hergeleitet werden. Man findet beispielsweise:

- Ein Runge–Kutta–Verfahren mit den Parametern $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ hat dann mindestens die Konsistenzordnung $p = 2$, wenn

$$\sum_{j=1}^{s} b_jc_j = \frac{1}{2}. \tag{6.39}$$

  . Diese Bedingung wird im Beispiel 6.101 für $s = 2$ gezeigt.
- Gelten außerdem

$$\sum_{j=1}^{s} b_jc_j^2 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{s} b_j \sum_{k=1}^{s} a_{jk}c_k = \frac{1}{6},$$

  so hat es die Konsistenzordnung $p = 3$.

Die Beweise dieser Aussagen findet man in der Literatur. □

Beispiel 6.101 *Zweistufige Runkte–Kutta–Verfahren.* Zur Untersuchung zweistufiger Runge–Kutta–Verfahren betrachtet man der Einfachheit halber das sogenannte autonome Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Für die Steigungen gilt

$$
\begin{aligned}
K_1(y) &= f(y_k), \\
K_2(y) &= f\left(y_k + ha_{21}K_1(y_k)\right) = f\left(y_k + ha_{21}f(y_k)\right) \\
&= f(y_k) + ha_{21}f(y_k)f_y(y_k) + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Verfahrensfunktion im Falle eines exakten Startwertes

$$\Phi(y(x_k)) = b_1K_1(y)+b_2K_2(y) = (b_1+b_2)f(y(x_k))+hb_2a_{21}f(y(x_k))f_y(y(x_k))+\mathcal{O}(h^2).$$

Die Taylor–Entwicklung der Lösung besitzt die Gestalt

$$y(x_k+h) = y(x_k) + h\underbrace{y'(x_k)}_{=f(y(x_k))} + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

Mit Kettenregel erhält man

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(y(x)) = f_y(y)y'(x) = f_y(y)f(y(x)).$$

Damit folgt für den lokalen Fehler

$$\begin{aligned}
\mathrm{le}(x_k+h) &= y(x_k+h) - y(x_k) - h\Phi(y(x_k)) \\
&= y(x_k) + hf(y(x_k)) + \frac{h^2}{2}\left(f_y(y(x_k))f(y(x_k))\right) + \mathcal{O}\left(h^3\right) - y(x_k) \\
&\quad -h\Big((b_1+b_2)f(y(x_k)) + hb_2a_{21}f(y(x_k))f_y(y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)\Big) \\
&= h\big(1-(b_1+b_2)\big)f(y(x_k)) + h^2\left(\frac{1}{2} - b_2a_{21}\right)f(y(x_k))f_y(y(x_k)) \\
&\quad +\mathcal{O}\left(h^3\right).
\end{aligned}$$

Für eine möglichst hohe Konsistenzordnung müssen die ersten beiden Terme verschwinden. Man erhält mit der Bedingung $c_2 = a_{21}$

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2a_{21} = \frac{1}{2} \iff b_2c_2 = \frac{1}{2}.$$

Die erste Bedingung ist die allgemeine Konsistenzbedingung (6.37) und die zweite Bedinung ist genau (6.39) für $s = 2$. Mit diesen beiden Bedingungen sind alle 2–stufigen expliziten Runge–Kutta–Verfahren charakterisiert, welche die Konsistenz– und Konvergenzordnung 2 besitzen

$$\begin{array}{c|cc} c_2 & c_2 & \\ \hline & 1-\frac{1}{2c_2} & \frac{1}{2c_2} \end{array}, \quad \text{mit } c_2 \neq 0.$$

Für $c_2 = 1/2$ erhält man die Methode von Runge (1895)

$$\begin{array}{c|cc} 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}.$$

Bezüglich der Approximation des Integrals in (6.35) entspricht das der Nutzung der Mittelpunktregel.

Für $c_2 = 1$ erhält man die Methode von Heun[19] (1900)

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array},$$

was der Nutzung der Trapezregel zur numerischen Quadratur in (6.35) entspricht. □

[19]Karl Heun (1859 – 1929)

Bemerkung 6.102 *Zu autonomen Differentialgleichungen.* Jede explizite Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$$

kann durch die Einführung der Funktionen

$$\overline{y}(x) := x \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{y}}(x) := \begin{pmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \overline{y}(x) \end{pmatrix}$$

in die autonome Form

$$\tilde{\mathbf{y}}'(x) = \tilde{\mathbf{f}}\left(\tilde{\mathbf{y}}(x)\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. □

Satz 6.103 Konsistenz und Konvergenz expliziter Runge–Kutta–Verfahren. *Sei $y(x)$ die Lösung des Anfangswertproblems* (6.32) *mit $f \in C(S)$ und genüge $f(x, y)$ in der zweiten Komponente einer Lipschitz–Bedingung. Dann ist ein explizites Runge–Kutta–Verfahren, welches von Ordnung p konsistent ist auch von Ordnung p konvergent.*

Beweis: Die Verfahrensfunktion bei expliziten Runge–Kutta–Verfahren ist eine Linearkombination von Funktionswerten der rechten Seite $f(x, y)$. Damit ist die Voraussetzung von Satz 6.91 erfüllt, da die dort geforderte Lipschitz–Bedingung an die Verfahrensfunktion bei Runge–Kutta–Verfahren gerade der Lipschitz–Bedingung an die rechte Seite der Differentialgleichung entspricht. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 6.91. ■

Bemerkung 6.104 *Explizite Runge–Kutta–Verfahren höherer Ordnung.* Analog zu 2–stufigen Verfahren kann man Bedingungen an die Koeffizienten eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens finden, um höhere Ordnungen zu erreichen. Es bleibt noch die Frage, was die Mindestanzahl von Stufen eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens ist, um eine gewisse Ordnung erreichen zu können. Antworten gab Butcher (1963, 1965, 1985)

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\min s$	1	2	3	4	6	7	9	11

.

□

Beispiel 6.105 *Klassisches Runge–Kutta–Verfahren (1901).* Das sogenannte klassische Runge–Kutta–Verfahren ist ein vierstufiges Verfahren mit dem Butcher–Schema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array} .$$

Es basiert auf der Simpson[20]–Formel. Der mittlere Knoten der Simpson–Formel wird zweimal betrachtet, $c_2 = c_3$, jedoch mit anderen zweiten Argumenten in der Berechnung der Steigungen. Dieses Verfahren ist von vierter Ordnung. □

[20]Thomas Simpson (1710 – 1761)

6.5.5 Implizite Runge–Kutta–Verfahren

Bemerkung 6.106 *Herleitung von impliziten Runge–Kutta–Verfahren.* Implizite Runge–Kutta–Verfahren werden aus der Integraldarstellung (6.35) des Anfangswertproblems hergeleitet. Man kann zeigen, dass für jedes implizite Runga–Kutta–Verfahren mit Gewichten b_j und Knoten $x_k + c_j h$ eine entsprechende Quadraturformel mit den gleichen Gewichten und Knoten existiert, siehe Abschnitt 4.3. □

Beispiel 6.107 *Gauß–Legendre Quadraturpunkte.* Betrachte das Intervall $[x_k, x_k + h] = [x_k, x_{k+1}]$. Seien $c_1, \ldots, c_s$ die Nullstellen des Legendre–Polynoms $P_s(t)$ in der Variablen

$$t = \frac{2}{h}(x - x_k) - 1 \quad \Longrightarrow \quad t \in [-1, 1].$$

Es gibt s verschiedene reelle Nullstellen in $(-1, 1)$. Hat man $c_1, \ldots, c_s$ berechnet, kann man die Koeffizienten a_{ij}, b_j so bestimmen, dass man ein Verfahren der Ordnung $2s$ erhält. Dazu muss man die linearen Systeme

$$\sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} a_{ij} = \frac{c_i^k}{k}, \quad \sum_{j=1}^{s} c_j^{k-1} b_j = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \ldots, s,$$

lösen. Zur Herleitung dieser Bedingungen siehe Literatur. □

Beispiel 6.108 *Klassen von impliziten Runge–Kutta–Verfahren.*

- *Gauß–Legendre–Verfahren.* Es werden die Gauß–Legendre–Quadraturknoten genutzt. Ein s–stufiges Verfahren besitzt die (maximal mögliche !) Ordnung $2s$. Alle Quadraturpunkte liegen im Inneren des Intervalls.
  Beispiel: Implizite Mittelpunktregel

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}.$$

- *Gauß–Radau[21]–Verfahren.* Diese Verfahren sind dadurch charakterisiert, dass einer der beiden Endpunkte des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$ zu den Quadraturpunkten gehört. Ein s–stufiges Verfahren dieser Klasse kann maximal von Ordnung $2s - 1$ sein.
  Beispiele:
  - $\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ $\quad s = 1,\ p = 1,$
  - $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$ $\quad s = 1,\ p = 1,$ implizites Euler–Verfahren.

  Das erste Verfahren erfüllt die Bedingung (6.38) nicht.
- *Gauß–Lobatto[22]–Verfahren.* In diesen Verfahren sind beide Endpunkte des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$ Quadraturpunkte. Ein s–stufiges Verfahren dieser Art kann maximal von Ordnung $2s - 2$ sein.
  Beispiele:
  - Trapezregel, Crank[23]–Nicolson[24]–Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad s = p = 2.$$

[21] Rodolphe Radau (1835 – 1911)
[22] Rehuel Lobatto (1797 – 1866)
[23] John Crank (1916 – 2006)
[24] P. Nicolson

Man hat bei diesem Verfahren *Übungsaufgabe*

$$
\begin{aligned}
K_1(x,y) &= f(x_k, y_k),\\
K_2(x,y) &= f\left(x_k + h, y_k + \frac{h}{2}K_1(x,y) + \frac{h}{2}K_2(x,y)\right),\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}K_1(x,y) + \frac{h}{2}K_2(x,y)\\
&= y_k + \frac{h}{2}f(x_k,y_k) + \frac{h}{2}f(x_{k+1},y_{k+1}).
\end{aligned}
$$

◦ anderes Verfahren

$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 1/2 & 0\\
1 & 1/2 & 0\\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
\quad s = 2,\ p = 2.
$$

Das zweite Verfahren erfüllt die Bedingung (6.38) nicht.

□

Bemerkung 6.109 *Diagonal–implizite Runge–Kutta–Verfahren (DIRK–Verfahren).* Bei einem s–stufigen Runge–Kutta–Verfahren hat man ein gekoppeltes, nichtlineares System für $K_1(x,y),\ldots,K_s(x,y)$ zu lösen. Für größere s ist das teuer. Ein Kompromiss besteht darin, sogenannte diagonal–implizite Runge–Kutta–Verfahren (DIRK–Verfahren) zu nutzen:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\
c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & & a_{ss}\\
\hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s
\end{array}.
$$

In DIRK–Verfahren hat man s unabhängige nichtlineare Gleichungen für die Steigungen zu lösen. In der Gleichung für $K_i(x,y)$ kommen nur $K_1(x,y),\ldots,K_i(x,y)$ vor, wobei man $K_1(x,y),\ldots,K_{i-1}(x,y)$ bereits berechnet hat. □

Bemerkung 6.110 *Ausblick.* Pro Zeitschritt ist die Verwendung impliziter Verfahren wesentlich teurer als die expliziter Verfahren, da man bei impliziten Verfahren nichtlineare Gleichungen oder Gleichungssysteme lösen muss, während man bei expliziten Verfahren nur die rechte Seite der Differentialgleichung auswerten muss. Die Frage ist nun, wie lang man die Zeitschritte wählen kann, damit das Verfahren noch funktioniert. Dazu untersucht man im Rahmen der linearen Stabilitätstheorie das Verhalten der Verfahren für das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1,\ \lambda \in \mathbb{C}, Re(\lambda) < 0,$$

dessen Lösung $y(x) = e^{\lambda x}$ ist. Es stellt sich heraus, dass man bei expliziten Verfahren nur sehr kleine Schritte verwenden darf, währenddessen bei impliziten Verfahren große Schritte erlaubt sind, siehe Numerik 2 für Details. Deshalb ist es insgesamt nicht klar, welcher Typ von Verfahren besser ist. Dies wird auch vom konkret betrachteten Problem abhängen. □

Literaturverzeichnis

Beresin, I. S. and N. P. Shidkow, 1970: *Numerische Methoden. 1.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 384 pp., Übersetzung aus dem Russischen und wissenschaftliche Redaktion: M. Schneider, K. Mätzel und W. Mach, Hochschulbücher für Mathematik, Band 70.

Deuflhard, P. and A. Hohmann, 2008: *Numerische Mathematik. 1.* 4th ed., de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook], Walter de Gruyter & Co., Berlin, xii+375 pp., eine algorithmisch orientierte Einführung. [An algorithmically oriented introduction].

Francis, J. G. F., 1961/1962: The QR transformation: a unitary analogue to the LR transformation. I. *Comput. J.*, **4**, 265–271.

Golub, G. H. and C. F. Van Loan, 1996: *Matrix computations.* 3d ed., Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, xxx+698 pp.

Hanke-Bourgeois, M., 2006: *Grundlagen der numerischen Mathematik und des wissenschaftlichen Rechnens.* 2d ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Wiesbaden, 840 pp., doi:10.1007/978-3-8351-9020-7, URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8351-9020-7`.

Heuser, H., 2006: *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* 5th ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 628 pp., einführung in Lehre und Gebrauch. [Introduction to theory and application].

Kamke, E., 1945: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Band I. Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern. Band 18, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1943, xxvii+642 pp., 2d ed.

Kiełbasiński, A. and H. Schwetlick, 1988: *Numerische lineare Algebra*, Mathematik für Naturwissenschaft und Technik [Mathematics for Science and Technology], Vol. 18. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 472 pp., eine computerorientierte Einführung. [A computer-oriented introduction].

Kublanovskaja, V. N., 1961: Some algorithms for the solution of the complete problem of eigenvalues. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, **1**, 555–570.

Rutishauser, H., 1958: Solution of eigenvalue problems with the LR-transformation. *Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser.*, **1958 (49)**, 47–81.

Stoer, J. and R. Bulirsch, 2005: *Numerische Mathematik. 2.* 5th ed., Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook], Springer-Verlag, Berlin, xiv+341 pp., eine Einführung—unter Berücksichtigung von Vorlesungen von F. L. Bauer. [An introduction, with reference to lectures by F. L. Bauer].

Wilkinson, J. H., 1965: *The algebraic eigenvalue problem.* Clarendon Press, Oxford, xviii+662 pp.