Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

9. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 13.06.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung
Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.
Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (4 Theoriepunkte)
Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich die Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Nullstellen des charackteristischen Polynoms $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ berechnen lassen. Sei $A = I \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Berechnen Sie die Koeffizienten des charakterischen Polynoms, d.h. bestimmen Sie a_k, $k = 0, \ldots, n$, in der Darstellung

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \; .$$

b) Stören Sie a_0 mit $0 < \epsilon << 1$ und vergleichen Sie die so gewonnen Nullstellen mit den korrekten.

c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis hinsichtlich der numerischen Brauchbarkeit des charakteristischen Polynoms zur Berechnung von Eigenwerten.

2. Aufgabe (2 Theoriepunkte)
Als Verfahren $D_2(h)$ zur Berechnung der Ableitung $f''(x)$ sei der Differenzenquotient

$$D_2(h) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

gegeben. Bestimmen Sie die asymptotische Entwicklung des Fehlers in h.

3. Aufgabe (2 Theoriepunkte)
Schätzen Sie mit Hilfe von Gershgorin Kreisen die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ab.

4. Aufgabe (6 Programmierpunkte)

a) Programmieren Sie die Potenzmethode in `matlab`.

b) Berechnen Sie mit Hilfe Ihres Programms den betragsgrößten Eigenwert der Matrix

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

für $\alpha = 30$ und $\alpha = -30$ bis zu einer Genauigkeit von $tol = 10^{-10}$, d.h. bis

$$\frac{\left|\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}\right|}{\left|\lambda^{(k+1)}\right|} < tol \, .$$

Verwenden Sie als Startwert den Einheitsvektor. Wieviele Iterationen werden jeweils benötigt?

c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus dem vorherigen Teil.