Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

8. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 07.06.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung
Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.
Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (6 Theoriepunkte)
Jedes Element T_{ik} im Extrapolationstableau der extrapolierten Trapezregel läßt sich als Ergebnis einer Quadraturformel auffassen. Zeigen Sie, daß bei Verwendung der Romberg-Folge gilt:

a) T_{11} entspricht der summierten Simpson-Regel, T_{22} entspricht der summierten Milneregel.

b) T_{ik}, $i > k$, erhält man durch Anwendung der zu T_{kk} gehörigen Quadraturformel auf dass $(i-k)$-mal halbierte Ausgangsintervall.

c) Für jedes T_{ik} sind die Gewichte der zugehörigen Quadraturformel positiv.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für die Gewichte $\lambda_{i,n}$ der zu T_{kk} gehörigen Quadraturformel

$$\max_i \lambda_{i,n} \leq 4^k \cdot \min_i \lambda_{i,n}$$

gilt.

2. Aufgabe (4 Theoriepunkte)
Führen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville Tableaus eine Romberg-Quadratur ausgehend von der summierten Trapezregel für das Integral

$$\int_0^1 t^5 dt$$

bei Benutzung der Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = 0.5$ und $h_2 = 0.25$ durch.

3. Aufgabe (8 Programmierpunkte)
Im Skript wird beschrieben, wie sich die Ordnung einer Quadraturformel durch geschickte Wahl der Stützstellen verbessern lässt. Die 3/8-Regel (eine der summierten Newton-Cotes Formeln), welche äquidistante Stützstellen verwendet, ist offenbar von geringerer Ordnung als die angegebene Gauss-Christoffel-Quadratur mit Stützstellen

$$x_{0k} = z_{k-1}, \quad x_{1k} = z_{k-1} + \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\right) h_k, \quad x_{2k} = z_{k-1} + \tfrac{1}{2}\left(1 + \tfrac{1}{5}\sqrt{5}\right) h_k, \quad x_{3k} = z_k$$

und zugehörgen Gewichten

$$\lambda_0 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_1 = \frac{5}{12}, \quad \lambda_2 = \frac{5}{12}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{12},$$

obwohl beide Verfahren die gleiche Anzahl an f-Auswertungen benötigen.

a) Implementieren Sie sowohl eine Funktion

```
function int = summNCQuad(f,m,I)
```

als auch eine Funktion

```
function int = GaussChrisQuad(f,m,I)
```

welche jeweils den Wert `int` des Integrals über die Funktion f auf dem Intervall $I = [a, b]$ unter Verwendung von $m - 1$ Teilintervallen und der entsprechenden Quadraturformel approximieren.

b) Testen Sie beide Programme an der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\log(2)(1 + x)}$$

auf dem Intervall $I = [0, 1]$. Plotten Sie den Fehler der Quadratur in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Stützstellen und erklären Sie das Resultat.