Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

7. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 30.05.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung
Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.
Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (4 Theoriepunkte)
Die n-te Newton-Côtes-Formel ist so konstruiert, dass sie für Polynome vom Grad $\leq n$ den exakten Integralwert liefert. Zeigen Sie, dass für *gerades* n sogar Polynome vom Grad $n+1$ exakt integriert werden.
Hinweis: Verwenden Sie die Restgliedformel der Polynominterpolation und nutzen Sie die Symmetrie bzgl. $(a+b)/2$ aus.

2. Aufgabe (4 Theoriepunkte)
Ähnlich wie im eindimensionalen Fall kann man in höheren Dimensionen Quadraturformeln gewinnen. Um eine Quadraturformel für die Integration auf Rechtecken zu gewinnen, verfahre man wie folgt:

a) Überlegen Sie sich, wie die lineare Interpolation bzgl. der Eckpunkte auf einem rechtwinkligen Dreieck mit den Ecken $e_1 = (0,0)$, $e_2 = (a,0)$, $e_3 = (0,b)$ aussieht.

b) Gewinnen Sie eine Quadraturformel für das Dreieck durch Integration der entsprechenden linearen Lagrange–Polynome L_k, die in 2–D analog zu ihren Verwandten in 1–D definiert sind, nämlich: $L_k(e_i) = \delta_{ki}$.

c) Leiten Sie hiervon die gesuchte Quadraturformel für ein Rechteck ab.

3. Aufgabe (8 Programmierpunkte)
Implementieren Sie die summierten Newton-Côtes-Formels als Matlab-Funktion `[S,A]=sumnc(ab,f,k,n)`. Dabei ist `ab` das Integrationsintervall, `f` die zu integrierende Funktion und `n` die Anzahl der Teilintervalle, auf denen die `k`-te Newton-Côtes-Formel angewandt wird. Das

Programm soll den Wert `S` der Quadraturformel und die Anzahl `A` der durchgeführten `f`-Auswertungen zurückgeben. Vergleichen Sie die Quadraturformeln für `k` $= 1, 2, 6, 8$ wie folgt:

a) Werten Sie das Integral $I = \int_0^\pi \sin(t)dt$ jeweils für $n \in 6 \cdot \{1, 2, 3, 4, ..., 50\}$ aus. Stellen Sie den Aufwand über dem Fehler graphisch dar.

b) Verfahren Sie für $I = \int_0^1 \left(\sqrt{t} + \sin(21\pi t)\right) dt$ und $n \in 6 \cdot \{1, 2, 3, 4, ..., 200\}$ wie in Teil a).

Kommentieren Sie die Ergebnisse.