Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

6. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 23.05.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (2+4 Theoriepunkte)

a) Bestimmen Sie die Hermite-Interpolierte $p \in \mathcal{P}_4$ zu den Hermite-Interpolationsbedingungen

$$\begin{aligned} &p(0) = 1 \\ &p(1) = 0, \quad p'(1) = 1, \quad p''(1) = 0 \\ &p(2) = 1. \end{aligned}$$

b) Konstruieren Sie das Hermite-Interpolationspolynom zu den Bedingungen

$$p^{(k)}(x_j) = f^{(k)}(x_j) \qquad k = 0, 1, 2,\ j = 0, \ldots, n\ .$$

2. Aufgabe (6 Theoriepunkte)
Es sei S^3_Δ der Raum aller kubischen Splinefunktionen mit natürlichen Randbedingungen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

a) Welche der folgenden Funktionen sind aus S^3_Δ?
   a) $f(x) = x^3 - x^2$
   b) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$
   c) $f(x) = \max\{0, (x-1)^3\} - \frac{1}{2}x^3$

b) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S^3_\Delta$ zu $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0)$, $s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

3. Aufgabe (8 Programmierpunkte)

a) Implementieren Sie in `matlab` den Algorithmus zur Berechnung kubischer Splines mit *vollständigen Randbedingungen*, d.h.

$$s_3'(x_0) = f'(x_0), \qquad s_3'(x_n) = f'(x_n) \ .$$

b) Testen Sie Ihr Programm an der Funktion $f(x) = \sqrt{1.5 + x}$ auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ mit äquidistanten Knoten. Berechnen Sie den Fehler zwischen $\phi_n(f) \in \mathcal{S}^3_\Delta$ und f an der Stelle $x = -\frac{5}{16}\pi$ für $n = 4^i$, $i = 1, \ldots, 8$ und vergleichen Sie diesen Fehler mit der theoretischen Fehlerschranke.

c) Für große n lohnt es sich, die Spezialstruktur der bei der Spline-Interpolation entstehenden Matrix auszunutzen. Welcher Algorithmus bietet sich zum Lösen des Gleichungssytems an und wie groß ist der Aufwand? Ist der von Ihnen gewählte Algorithmus stabil? Welcher Vorteil ergibt sich bei geschickter Implementation hinsichtlich des Speichers?

Hinweis: Achten Sie darauf keine unnötigen Schleifen in Ihr Programm einzubauen. Zur Analyse Ihres Programms können Sie die `matlab`-Funktion `profile` verwenden. Für die dividierten Differenzen empfiehlt sich der `matlab`-Operator `diff` zusammen mit der elementweisen Division. Mit dem Befehl

```
find(y <= x(k+1) & y >= x(k))
```

lassen sich die Indizes $i_{k_1}, \ldots, i_{k_m}$ der m Elemente finden, für die

$$x_i \leq y_{i_{k_1}}, \ldots, y_{i_{k_m}} \leq x_{i+1}$$

gilt.