Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

4. Übung zur Vorlesung

# Numerik 1

SS 2012

**Abgabe: Mi., 25.04.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung**

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

**1. Aufgabe** (4 Theoriepunkte)

Man beweise die folgenden Eigenschaften der Householder–Transformation.
Sei $u \in \mathbb{R}^m$ mit $\|u\|_2 = 1$ und $H = I - 2uu^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann gelten

a) $H = H^T$,

b) $H^2 = I$,

c) $H^T H = I$,

d) $Hy = y \in \mathbb{R}^m$ ist äquivalent zu $y^T u = 0$,

e) $Hu = -u$.

**2. Aufgabe** (2 Theoriepunkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die verallgemeinerte Inverse $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ von $A$ ist eindeutig durch die sogenannten Moore–Penrose–Bedingungen bestimmt:

$$AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+,\ (AA^+)^T = AA^+,\ (A^+A)^T = A^+A.$$

Man berechne mit Hilfe dieser Bedingungen die verallgemeinerte Inverse von $A = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$.

**3. Aufgabe** (2 Theoriepunkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Man zeige für die Spektralkonditionszahl

$$\kappa_2(A^T A) = (\kappa_2(A))^2.$$

Hinweis: Man nutze die Beziehungen zwischen den Eigenwerten einer symmetrisch positiv definiten Matrix und ihres Quadrates.

**4. Aufgabe** (6 Programmierpunkte)
Um den Zusammenhang zwischen Personen-Arbeitsstunden und der Anzahl von chirugischen Eingriffen zu ermitteln, wurden in 15 Krankenhäusern entsprechende Daten erhoben:

| $y$ (Arbeitsstd. / Monat) | $x$ (Anzahl der chirug. Eingriffe) |
|---|---|
| 1275 | 230 |
| 1350 | 235 |
| 1650 | 250 |
| 2000 | 277 |
| 3750 | 522 |
| 4222 | 545 |
| 5018 | 625 |
| 6125 | 713 |
| 6200 | 735 |
| 8150 | 820 |
| 9975 | 992 |
| 12200 | 1322 |
| 12750 | 1900 |
| 13014 | 2022 |
| 13275 | 2155 |

Für die Abhängigkeit der Arbeitsstunden von der Anzahl der chirugischen Eingriffe stehen drei Modelle zur Verfügung:

a) $y = a + bx$

b) $\log(y) = a + b/x$

c) $y = a + bx + cx^2$

Lösen Sie die drei linearen Ausgleichsprobleme für $a$, $b$ und $c$ durch $QR$-Zerlegung (In `matlab` wird hierfür die Funktion `qr` bereitgestellt.) Stellen die Ergebnisse graphisch dar und begründen Sie, welchem der Modelle Sie den Vorzug geben würden.