Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

3. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 25.04.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung Allg

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.
Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (2 Theoriepunkte)
Schreiben Sie das lineare Ausgleichsproblem, wie Sie es aus der Vorlesung kennen, als Bestapproximationsaufgabe. Was sagt Ihnen dies bereits über Lösungen dieses Problems ohne Ihr neu erworbenes Wissen über lineare Ausgleichsprobleme zu bemühen?

2. Aufgabe (2+2 Theoriepunkte)
Lesen Sie den abgebildeten Abschnitt 6 aus Anton Börsch; Paul Simon (Hrsg.): "Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauss".

a) Es seien die Punkte $(u_1, v_1) = (1, \frac{\sqrt{7}}{2})$, $(u_2, v_2) = (0, \frac{\sqrt{15}}{4})$ und $(u_3, v_3) = (\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$ gegeben. Von den Punkten weiß man, dass sie einer Ellipsengleichung der Form
$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$
genügen sollten. Bestimmen Sie die Parameter $a, b > 0$ optimal im Sinne der Methode von Gauß. Was ergäben sich für Probleme bei der Methode von Laplace?

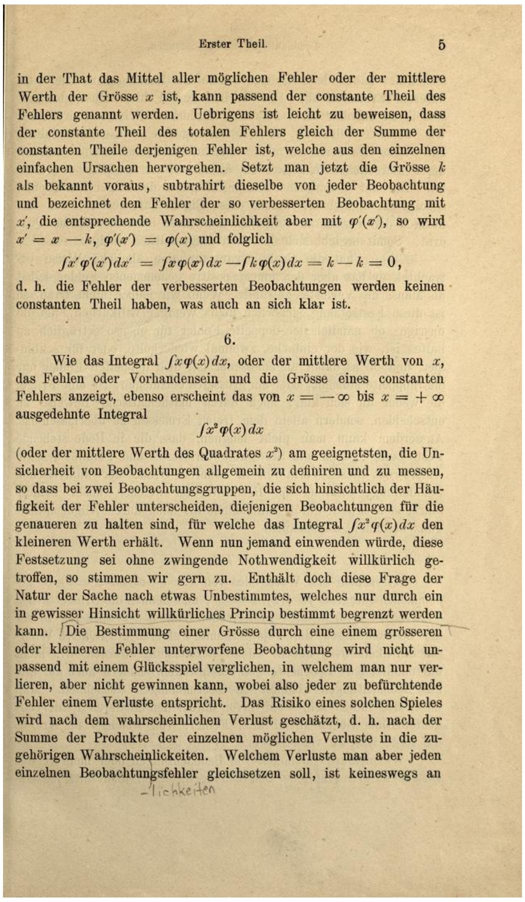
b) Informieren Sie sich über die *lineare Optimierung* (z.B. durch Suche im Internet o.ä.) und ordnen Sie diese kurz in den gegebenen Zusammenhang ein.

3. Aufgabe (6 Programmierpunkte)

a) Berechnen Sie mit Hilfe eines Matlabprogramms die L^2-Bestapproximation von $g(x) \equiv 1$ auf dem Intervall $[0, 1]$ im Raum $\mathbb{P}_{2^k}$ für $k = 0, \ldots, 5$. Benutzen Sie als Basis für $\mathbb{P}_n$ die Monome $\phi_i(x) = x^i$.
Berechnen Sie die auftretenen Gleichungssysteme einmal mit Hilfe des Befehls $inv(A)$, einmal mit `x = A\b`.
Berechnen Sie die Approximationsfehler in der Energienorm $\|Ax - b\|_2$. Was beobachten Sie?

b) Lesen Sie die Hilfe zur Funktion `hilb`.

c) Berechnen Sie nun die LU-Zerlegung von A, d.h. benutzen Sie die Funktion $[L, U] = lu(A)$ in Matlab. Sie erhalten eine Zerlegung $A = LU$. Lösen Sie nun die Gleichungssysteme innerhalb Ihres Programms einmal mit $x_1 = (U^{-1} * L^{-1}) * b$, einmal mit $x_2 = U^{-1} * (L^{-1} * b)$, wobei Sie zum Invertieren einmal den \-Operator benutzen, einmal inv. Berechnen Sie jeweils die Fehler und interpretieren Sie alle Ergebnisse. (Zum Überblick: in der gesamten Aufgabe sind für jedes k 6 verschiedene Lösungen zu berechnen.)



Erster Theil. 5

in der That das Mittel aller möglichen Fehler oder der mittlere Werth der Grösse x ist, kann passend der constante Theil des Fehlers genannt werden. Uebrigens ist leicht zu beweisen, dass der constante Theil des totalen Fehlers gleich der Summe der constanten Theile derjenigen Fehler ist, welche aus den einzelnen einfachen Ursachen hervorgehen. Setzt man jetzt die Grösse k als bekannt voraus, subtrahirt dieselbe von jeder Beobachtung und bezeichnet den Fehler der so verbesserten Beobachtung mit x', die entsprechende Wahrscheinlichkeit aber mit $\varphi'(x')$, so wird $x' = x - k$, $\varphi'(x') = \varphi(x)$ und folglich

$$\int x'\varphi'(x')\,dx' = \int x\varphi(x)\,dx - \int k\varphi(x)\,dx = k - k = 0,$$

d. h. die Fehler der verbesserten Beobachtungen werden keinen constanten Theil haben, was auch an sich klar ist.

6.

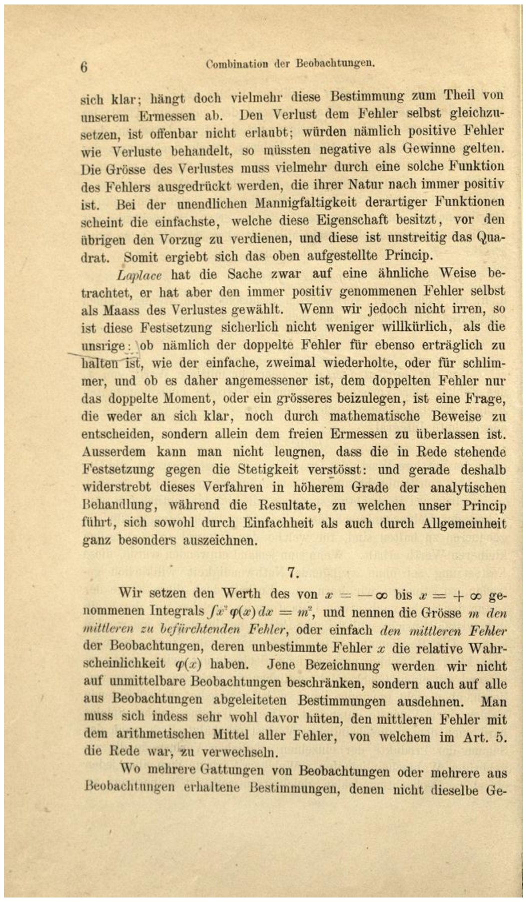
Wie das Integral $\int x\varphi(x)\,dx$, oder der mittlere Werth von x, das Fehlen oder Vorhandensein und die Grösse eines constanten Fehlers anzeigt, ebenso erscheint das von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausgedehnte Integral

$$\int x^2\varphi(x)\,dx$$

(oder der mittlere Werth des Quadrates x^2) am geeignetsten, die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definiren und zu messen, so dass bei zwei Beobachtungsgruppen, die sich hinsichtlich der Häufigkeit der Fehler unterscheiden, diejenigen Beobachtungen für die genaueren zu halten sind, für welche das Integral $\int x^2\varphi(x)\,dx$ den kleineren Werth erhält. Wenn nun jemand einwenden würde, diese Festsetzung sei ohne zwingende Nothwendigkeit willkürlich getroffen, so stimmen wir gern zu. Enthält doch diese Frage der Natur der Sache nach etwas Unbestimmtes, welches nur durch ein in gewisser Hinsicht willkürliches Princip bestimmt begrenzt werden kann. Die Bestimmung einer Grösse durch eine einem grösseren oder kleineren Fehler unterworfene Beobachtung wird nicht unpassend mit einem Glücksspiel verglichen, in welchem man nur verlieren, aber nicht gewinnen kann, wobei also jeder zu befürchtende Fehler einem Verluste entspricht. Das Risiko eines solchen Spieles wird nach dem wahrscheinlichen Verlust geschätzt, d. h. nach der Summe der Produkte der einzelnen möglichen Verluste in die zugehörigen Wahrscheinlickeiten. Welchem Verluste man aber jeden einzelnen Beobachtungsfehler gleichsetzen soll, ist keineswegs an

-lichkeiten

(a)



6 Combination der Beobachtungen.

sich klar; hängt doch vielmehr diese Bestimmung zum Theil von unserem Ermessen ab. Den Verlust dem Fehler selbst gleichzusetzen, ist offenbar nicht erlaubt; würden nämlich positive Fehler wie Verluste behandelt, so müssten negative als Gewinne gelten. Die Grösse des Verlustes muss vielmehr durch eine solche Funktion des Fehlers ausgedrückt werden, die ihrer Natur nach immer positiv ist. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen scheint die einfachste, welche diese Eigenschaft besitzt, vor den übrigen den Vorzug zu verdienen, und diese ist unstreitig das Quadrat. Somit ergiebt sich das oben aufgestellte Princip.

Laplace hat die Sache zwar auf eine ähnliche Weise betrachtet, er hat aber den immer positiv genommenen Fehler selbst als Maass des Verlustes gewählt. Wenn wir jedoch nicht irren, so ist diese Festsetzung sicherlich nicht weniger willkürlich, als die unsrige: ob nämlich der doppelte Fehler für ebenso erträglich zu halten ist, wie der einfache, zweimal wiederholte, oder für schlimmer, und ob es daher angemessener ist, dem doppelten Fehler nur das doppelte Moment, oder ein grösseres beizulegen, ist eine Frage, die weder an sich klar, noch durch mathematische Beweise zu entscheiden, sondern allein dem freien Ermessen zu überlassen ist. Ausserdem kann man nicht leugnen, dass die in Rede stehende Festsetzung gegen die Stetigkeit verstösst: und gerade deshalb widerstrebt dieses Verfahren in höherem Grade der analytischen Behandlung, während die Resultate, zu welchen unser Princip führt, sich sowohl durch Einfachheit als auch durch Allgemeinheit ganz besonders auszeichnen.

7.

Wir setzen den Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int x^2\varphi(x)\,dx = m^2$, und nennen die Grösse m *den mittleren zu befürchtenden Fehler*, oder einfach *den mittleren Fehler* der Beobachtungen, deren unbestimmte Fehler x die relative Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ haben. Jene Bezeichnung werden wir nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränken, sondern auch auf alle aus Beobachtungen abgeleiteten Bestimmungen ausdehnen. Man muss sich indess sehr wohl davor hüten, den mittleren Fehler mit dem arithmetischen Mittel aller Fehler, von welchem im Art. 5. die Rede war, zu verwechseln.

Wo mehrere Gattungen von Beobachtungen oder mehrere aus Beobachtungen erhaltene Bestimmungen, denen nicht dieselbe Ge-

(b)