Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

2. Übung zur Vorlesung

NUMERIK 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 25.04.2012, 8:15 Uhr, am Beginn der Vorlesung ALLG

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.
Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (4 Theoriepunkte)
Beweisen Sie: Sei V ein Prä-Hilbertraum und $P : V \to V$ eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften
$$P^2 = P \quad \text{und} \quad \|P\| = 1\ .$$
Dann ist
$$u = Pf$$
die Bestapproximation von f auf $R(P) = \{Pw : \ w \in V\}$.

2. Aufgabe (6 Theoriepunkte)

a) Die *Tschebyscheff-Polynome 1. Art* sind gegeben durch
$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos(x)\right)$$
   a) Berechnen Sie die Nullstellen dieser Polynome.
   b) Zeigen Sie, dass diese Polynome
      i. nicht orthogonal bezüglich des L^2-Skalarproduktes sind;
      ii. orthogonal bezüglich des gewichteten Skalarproduktes
$$(v, w) = \int_{-1}^{1} \frac{v(x)\, w(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
      sind.

b) Sei $V = C[-1,1]$, $f(x) = x^4$ und $U = \mathcal{P}_3$. Berechnen Sie die Tschebyscheff- und die L^2-Approximation von f in U. Ermitteln Sie den Fehler der beiden Approximationen in der Supremums- sowie der L^2-Norm.

3. Aufgabe (6 Programmierpunkte)
Wir betrachten die Approximation von Funktionen durch *lineare finite Elemente.*

a) Schreiben Sie ein Programm, das die Funktion $g(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ approximiert. Unterteilen Sie dazu das Intervall äquidistant in n Teilintervalle der Schrittweite $h = 2\pi/n$ und nehmen Sie zur Approximation den Raum:

$$S_h = \left\{ u_h \in C([0, 2\pi]) \,\middle|\, u_h \text{ ist linear auf } [kh, (k+1)h],\ k = 0, \ldots, n-1 \right\} .$$

Bestimmen Sie den *exakten* Fehler $\|g - u_h\|_\infty$. Welche Abhängigkeit des Fehlers $\|g - u_h\|_\infty$ von der Schrittweite beobachten Sie?

Hinweis: In `matlab` heißt der arcus cosinus `acos`. Zum Aufstellen der rechten Seite bietet sich die Funktion `quad` in `matlab` an. Um etwa das Integral $\int_0^1 \sin(t)\, dt$ auszurechnen, gibt man einfach `quad('sin',0,1)` ein.

b) Es sei $g(x) = \exp(-\alpha|x|)$. Approximieren Sie g auf dem Intervall $[-4, 4]$ für $\alpha = 10, 100$ mit dem Programm aus Aufgabenteil a. Was beobachten Sie?