

Fachbereich Mathematik & Informatik

Freie Universität Berlin

Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

11. Übung zur Vorlesung

NUMERIK 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 27.06.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrücke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (4 Theoriepunkte)

Lösen Sie die folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

- (1) $y'(x) + y^2(x) = 1,$
- (2) $y'(x) + y(x) \cos x = 0,$
- (3) $y'(x) = xy^7(x),$
- (4) $2y(x)y'(x) = x^2.$

2. Aufgabe (2 Theoriepunkte)

Ein Motorboot bewegt sich bei ruhigem Wasser mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit von 10 km/h. Bei dieser Geschwindigkeit wird der Motor abgeschaltet und innerhalb von 20 Sekunden verringert sich die Geschwindigkeit des Bootes auf 6 km/h. Es wird angenommen, daß der Widerstand des Wassers das Boot proportional zu seiner Geschwindigkeit bremst. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Bootes 2 Minuten nach dem Ausschalten des Motors. Welchen Weg legt das Boot in der ersten Minute nach dem Ausschalten des Motors zurück?

3. Aufgabe (4 Theoriepunkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblems

$$y'(x) = 10 \left(y(x) - \frac{x^2}{1+x^2} \right) + \frac{2x}{(1+x^2)^2} \quad y(0) = 0.$$

Finden Sie nun die Lösung des Anfangswertproblems für die gleiche Differentialgleichung mit dem Anfangswert

$$y(0) = \varepsilon.$$

Betrachten Sie den Fehler zwischen der Lösung des ursprünglichen und des gestörten Anfangswertproblems für $x \in \{0.1, 0.5, 1, 2\}$ und $\varepsilon = 10^{-10}$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

4. Aufgabe (4 Programmierpunkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}(1+x)y'(x) + y(x) &= (1+x)^{-1}, \\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Lösung nach dem Iterationsverfahren von Picard–Lindelöf (ersten vier Koeffizienten). Schreiben sie zu diesem Zweck ein `matlab`-Programm.
- b) Berechnen Sie die Lösung mit dem Euler-Verfahren zu den Schrittweiten $h_1 = 0.2$ und $h_2 = 0.1$ (jeweils 10 Schritte).
- c) Betrachten Sie den Fehler aller Approximationen zur analytischen Lösung

$$y(x) = \frac{\ln(x+1) + 1}{1+x}$$

für $x = 0.5$.

- d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.