Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

10. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 20.06.2012, 8:30 Uhr, am Beginn der Vorlesung

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Für die Programmieraufgaben sind ein lauffähiges Programm in Matlab, welches ohne weitere Eingaben auskommt, und alle dafür notwendigen Teilprogramme an den jeweiligen Tutor per Email zu schicken. Alle Programme müssen *sinnvoll* kommentiert werden. Zudem müssen Ausdrucke der etwaigen Ausgaben sowie der Programme selbst mit den Theorieaufgaben abgegeben werden.

1. Aufgabe (2 Theoriepunkte)

In der Vorlesung haben Sie das *Superpositionsprinzip* kennengelernt und teilweise bewiesen. Beweisen Sie die restlichen Teilaussagen, nämlich

a) Sind $y_i(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung und $y_h(x)$ eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, dann ist $y_i(x) + y_h(x)$ eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

b) Sind $y_i(x)$ und $\tilde{y}_i(x)$ zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist ihre Differenz Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.

2. Aufgabe (4 Theoriepunkte)

Wieviele Lösungen hat das Anfangwertproblem

$$\begin{aligned} z'(t) &= \sqrt{|z(t)|} \\ z(0) &= 0 \text{ ?} \end{aligned}$$

Wie sehen diese aus?

3. Aufgabe (4 Theoriepunkte)

Die mathematischen Grundlagen auf dem Gebiet der enzymatischen Reaktionen entstammen den Arbeiten von Michaelis und Menten im Jahre 1913. Sie schlugen eine Situation vor, in der ein Substrat S mit einem Enzym E zu einem Komplex SE reagiert. Der Komplex wird dann in ein Produkt P und das Enzym E konvertiert. Schematisch können die drei Reaktionen R_1 R_2 und R_3 durch die Reaktionsgleichungen

$$S + E \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SE\,,\; SE \xrightarrow{k_3} P + E$$

repräsentiert werden, wobei die k_i die Parameter für die Reaktionsraten sind. Definiert man durch s, e, c und p die Konzentrationen von S, E, SE bzw. P, so kann die Reaktion mit Hilfe des *Massenwirkungsgesetzes* (das besagt, dass die Reaktionsraten R_j proportional zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanden mit Proportionalitätskonstanten k_j sind) formuliert werden.

a) Leiten Sie basierend auf dem Massenwirkungsgesetz für jede der vier Spezies eine gewöhnliche Differentialgleichung her.

b) Reduzieren Sie das System auf eine Differentialgleichung für p in Abhängigkeit von s indem Sie die Erhaltungeigenschaft der Gesamtkonzentrationen und die der Gesamtenzymkonzentration

$$e + c = const.$$

ausnutzen.

4. Aufgabe (6 Programmierpunkte)
Betrachten Sie den harmonischen Oszillator

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x$$

zum Anfangswert $x(0) = (x_1(0), x_2(0))$.

a) Wir wollen uns zunächst eine Vorstellung vom Phasenportrait machen. Lösen Sie dazu den harmonischen Oszillator zu unterschiedlichen Anfangswerten mit dem numerischen Integrator `ode45.m`, den `matlab` zur Verfügung stellt. Wir wollen dieses Verfahren als sogenanntes Black-Box einsetzen, d.h. wir vertrauen dem Programm und kümmern uns nicht um Interna. Beachten Sie dabei, dass die für `ode45.m` zu programmierende rechte Seite `F.m` als Übergabeparameter Ort *und* Zeit beinhalten muss, auch wenn die rechte Seite, wie in unserem Fall, autonom ist. Damit lautet die erste Zeile:

```
function y = F(t,x0) .
```

b) Nun wollen wir erforschen, was der explizite Euler mit dem harmonischen Oszillator macht. Programmieren Sie dazu den expliziten Euler für eine feste Schrittweite τ. Lösen Sie dann obige Differentialgleichung zu den Schrittweiten $\tau = 0.1, 0.01, 0.001$ zum Anfangswert $x_0 = (1, 0)$ bis zur Zeit $T = 30$ (bei der letzten Einstellung muss man eventuell etwas auf das Ergebnis warten). Interpretieren Sie die Ergebnisse.

c) Was würden Sie erwarten, wenn man zur Schrittweite $\tau = 0.001$ und Anfangswert $x_0 = (1, 0)$ den harmonische Oszillator mit dem expliziten Euler bis zur Zeit $T = 150$, also dem Fünffachen der obigen Zeit, berechnen würde?