Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. V. John (john@wias-berlin.de), H. Hardering (harderin@zedat.fu-berlin.de)

1. Übung zur Vorlesung

Numerik 1

SS 2012

Abgabe: Mi., 18.04.2012, 8:15 Uhr, am Beginn der Vorlesung Allg

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe (1 Zusatzpunkte)
Man beweise folgende Aussage. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^2([a,b])$, $|f'(x)| \geq C > 0$ für alle $x \in [a,b]$ und der Nullstelle $\alpha \in (a,b)$. Gilt

$$\left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1,$$

in einer Umgebung $U(\alpha)$ um α, dann konvergiert das Newton–Verfahren für jeden Startwert aus $U(\alpha)$ gegen α.

Hinweis: Banachscher Fixpunktsatz.

2. Aufgabe (1 Zusatzpunkte)
Es sei $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ und $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Zeigen Sie:

a) $g(M) \subset M$

b) $|g(x) - g(y)| < |x - y| \ \forall x, y \in M, \ x \neq y$

c) g besitzt *keinen* Fixpunkt in M

Warum ist dies kein Widerspruch zum Banachschen Fixpunktsatz?

3. Aufgabe (1+1 Zusatzpunkte)
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x) := F(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} x_2^2 + \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} x_1^2 - \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von F in

$$D := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty \leq 1\} \quad .$$

b) Berechnen Sie den Fixpunkt näherungsweise durch Fixpunktiteration, bis sich Ihre berechneten Näherungen nicht mehr ändern (aber höchstens mit einer Genauigkeit von 10^{-30}) und bestätigen Sie ihre letzte Näherung durch eine a posteriori-Fehlerabschätzung. Dokumentieren Sie Ihre Näherungen.

Hinweis: Um den Fixpunkt zu berechnen, empfiehlt es sich, in einer geeigneten Programmiersprache ein kurzes Programm zu schreiben.