Lösung eines Anfangswertproblems mit sukzessiver Approximation nach Picard–Lindelöf. Betrachte die Gleichung

$$y'(x) = -2xy(x), \quad y(0) = 1.$$

Dieses Anfangswertproblem erfüllt die Voraussetzungen des globalen Existenz– und Eindeutigkeitssatzes von Picard–Lindelöf. Anwendung der sukzessiven Approximation liefert

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x) &= 1 \\
y^{(1)}(x) &= y^{(0)} + \int_0^x \left(-2ty^{(0)}(t)\right)\, dt = 1 - \int_0^x 2x\, dt = 1 - x^2\Big|_0^x = 1 - x^2, \\
y^{(2)}(x) &= y^{(0)} + \int_0^x \left(-2ty^{(1)}(t)\right)\, dt = 1 - \int_0^x 2t\left(1 - t^2\right)\, dt = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}, \\
y^{(3)}(x) &= y^{(0)} + \int_0^x \left(-2ty^{(2)}(t)\right)\, dt = 1 - \int_0^x 2t\left(1 - t^2 + \frac{t^4}{2}\right)\, dt \\
&= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}, \\
&\vdots \\
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-x^2\right)^k}{k!} = e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem bestätigt die Richtigkeit der Lösung.