FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 10.12.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung Modellierung und Programmierung

Serie 06

zu erledigen in der Woche vom 17.12.–21.12.2007

Die Aufgaben 2 und 3(b) sind *vor* den Übungen im Computer–Pool zu erledigen. Dort soll lediglich die Lösungen besprochen und korrigiert werden.
Die Lösungen der Aufgaben 1 und 3(a) sind vor der Vorlesung am 19.12.2007 abzugeben.

1. Man betrachte den Schuss aus der Kanone.
   (a) Ausgehend von der hergeleiteten Gleichung mit den Parametern α und β wähle man die Zeitskala so, dass $\beta = 1$ wird.
   (b) Ausgehend von der damit erhaltenen Gleichung führe man eine Modellvereinfachung durch, unter der Annahme, dass die dimensionslose Höhe der Flugkurve klein gegenüber β ist. Man löse die resultierende Modellgleichung für $\tilde{x}_3(\tilde{t})$.
   (c) Analog zu Aufgabe 4.3 stelle man eine funktionale Beziehung zwischen $\tilde{x}_1(\tilde{t})$ und $\tilde{x}_3(\tilde{t})$ im Fall $V_2 = 0$ her.
   (d) Schließlich forme man diesen Zusammenhang in einen für die dimensionsbehafteten Größen um.

2. In der Vorlesung wurde der Differenzenquotient
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
zur Approximation der ersten Ableitung der Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 eingeführt. In der Analysis gilt, falls $f(x)$ in x_0 differenzierbar ist, dass der Wert des Differenzenquotienten für $\Delta x \to 0$ gegen $f'(x_0)$ strebt.

   Die Aussage der Analysis gilt für den Computer nicht mehr. Dazu betrachte man
$$f(x) = \tan(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \Delta x = 2^{-i},\ i = 3, 4, \ldots, 50.$$
   Man schreibe ein Matlab–Programm welches die Differenzenquotienten für das angegebene Beispiel berechnet (`for`–Schleife über i). Für welches i ist der Fehler zur tatsächlichen Ableitung am kleinsten?
   Hinweis: Man verwende `format long`.

3. (a) Man zeige, dass die Funktion

$$u(x) = \left(1 + \frac{2}{\lambda^3}\right) e^{\lambda x} - \frac{1}{\lambda^3}\left(\lambda^2 x^2 + 2\lambda x + 2\right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

das Anfangswertproblem (AWP)

$$u'(x) = \lambda u + x^2 (= f(x,u)), \quad u(0) = 1 \tag{1}$$

löst.

(b) Man berechne die numerische Lösung des AWP (1) mit $\lambda = 1$, im Intervall $[0,1]$, mit der Schrittweite $h = 0.1$ und mit dem expliziten Euler-Verfahren

$$u_{k+1}^h = u_k^h + hf(x_k, u_k), \quad u_0^h = u(0),$$

Die berechnete Lösung soll mit Hilfe des `plot`–Befehls dargestellt werden.