FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 29.10.2008

Hausübungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

Serie 30

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 12.11.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 22.10.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre1.html`
  abrufbar

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Man zeige, dass
$$\|AB\|_2 = \|B\|_2$$
gilt. Insbesondere für $m = 1$, d.h. B ist ein Vektor $\mathbf{b}$, gilt $\|A\mathbf{b}\|_2 = \|\mathbf{b}\|_2$.
4 Punkte

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass für die Spektralnorm
$$\|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$
gilt, wobei $\lambda_{\max}(A)$ der größte und $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert von A sind.
Hinweis: Sei λ ein Eigenwert von A. Man beweise zuerst, dass dann λ^2 ein Eigenwert von A^2 ist und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}. **4 Punkte**

3. Die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens ist $G(\omega) = I - \omega D^{-1}A$. Es folgt, dass wenn λ ein Eigenwert von $G(1)$ ist, dann ist $\mu = 1 - \omega(1-\lambda)$ ein Eigenwert von $G(\omega)$. Man betrachte den Fall, dass alle Eigenwerte reell sind und
$$\lambda_{\min}(G(1)) < -1 < \lambda_{\max}(G(1)) < 1.$$
Nach dem Satz in der Vorlesung gibt es damit Startwerte, für die das Jacobi-Verfahren ($\omega = 1$) nicht konvergiert. Wie muss man ω wählen, damit das gedämpfte Jacobi-Verfahren für alle Startwerte konvergiert? **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !