Lösungen zum 40. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :
   Es ist der Inhalt des Körpers über der Kreisscheibe zu berechnen, der oberhalb durch f begrenzt wird, also

$$P\left(\sqrt{x^2+y^2} \le R\right) = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

   Es bietet sich die Integration in Polarkoordinaten an:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ \det J &= r \end{aligned}$$

   Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{x^2+y^2} \le R\right) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} f(r,\varphi)\det(J)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^R \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, r \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\right) \mathrm{d}r \\ &= \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,\mathrm{d}r \\ &= -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^R \\ &= 1 - e^{-\frac{R^2}{2}} \end{aligned}$$

2. Aufgabe :
   Es ist

$$f_x(x) = \begin{cases} 0 & x \notin (0,1) \\ 1 & x \in (0,1) \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin (0,1) \\ 1 & y \in (0,1) \end{cases}$$

   Nach Voraussetzung sind die Zufallsgrößen X und Y unabhängig, deshalb gilt

$$f_{(x,y)}(x,y) = f_{(x)}(x) \cdot f_{(y)}(y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \notin (0,1)\times(0,1) \\ 1 & (x,y) \in (0,1)\times(0,1) \end{cases}$$

   Abstand zwischen x und y: $Z = |x-y|$. Es ist

$$E(Z) = \int_0^1 \int_0^1 Z \cdot f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^1 |x-y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^y (y-x)\,\mathrm{d}x + \int_y^1 (x-y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\left[yx - \frac{x^2}{2} \right]_0^y + \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_y^1 \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(y^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} - y - \frac{y^2}{2} + y^2 \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^2 - y + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Quadrat des Abstandes zwischen x und y: $Z = (x-y)^2$. Es ist

$$
\begin{aligned}
E(Z) &= \int_0^1 \int_0^1 Z \cdot f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 - 2xy + y^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - x^2 y + y^2 x \right] \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3} - y + y^2 \,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe :

(a) Es sei X die Anzahl der Ausschlußstücke. Vorgegeben sind $E(X) = 0.02n$ und $A = 0.01n$, wobei n die Anzahl der Stichproben ist. X ist binominialverteilt mit $p = 0.02$. Aus der Tschebyschew–Ungleichung erhält man

$$
\begin{aligned}
P(|X - E(X)| \geq A) &\leq \frac{V(X)}{a^2} \\
P(|X - 0.02n| \geq 0.01n) &\leq \frac{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}{(0.01n)^2} \\
&\leq 0.25
\end{aligned}
$$

dafür, dass man mit 75% Sicherheit von einem Ausschlussanteil von 0.02 um nicht mehr als 0.01 abweicht.

$$\begin{aligned} n \cdot 0.02 \cdot 0.98 &\leq 0.25 \cdot 0.0001 \cdot n^2 \\ n &\geq \frac{0.02 \cdot 0.98}{0.25 \cdot 0.0001} \\ &= 784 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Tschebyschew–Ungleichung erhält man einen minimalen Stichprobenumfang von $n = 784$.

(b) Es soll laut Aufgabenstellung gelten :

$$F_x(0.03n) - F_x(0.01n) \geq 0.75$$

Betrachte:

$$F_x(0.03n) - F_x(0.01n) = 0.75$$

zur Berechnung des minimalen n.

(c) Die linke Seite der Gleichung kann man mit Hilfe der Normalapproximation umformen in

$$F_x(0.03n) - F_x(0.01n) \approx \Phi\left(\frac{0.03n - 0.02n}{\sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}}\right) - \Phi\left(\frac{0.01n - 0.02n}{\sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}}\right)$$

Setzt man

$$0.75 = \Phi\left(\frac{0.01n}{\sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}}\right) - \Phi\left(\frac{-0.01n}{\sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}}\right)$$

So erhält man

$$\begin{aligned} 0.75 &= 2\Phi\left(\frac{0.01n}{\sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}}\right) - 1 \\ \Phi\left(\frac{0.01n}{\sqrt{n \cdot 0.02 \cdot 0.98}}\right) &= 0.875 \\ n &= \frac{0.02 \cdot 0.98 \cdot 1.15^2}{0.01^2} \\ n &= 259.21 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Normalapproximation erhält man einen minimalen Stichprobenumfang von $n = 260$ (wesentlich besser als in Teil (a)).