Lösungen zum 34. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :
   Nach Aufgabe 2, Präsenz–Übung 33 gilt:

$$u_{xx} = g_{rr}r_x^2 + g_{r\varphi}\varphi_x r_x + g_r r_{xx} + g_{\varphi r} r_x \varphi_x + g_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + g_\varphi \varphi_{xx}$$

   Analog erhält man:

$$\begin{aligned}
u_{yy} &= g_{rr}r_y^2 + g_{r\varphi}\varphi_y r_y + g_r r_{yy} + g_{\varphi r} r_y \varphi_y + g_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + g_\varphi \varphi_{yy} \\
\Longrightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} &= g_r\left(r_{xx} + r_{yy}\right) + g_\varphi\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}\right) \\
&\quad + g_{rr}\left(r_x^2 + r_y^2\right) + g_{\varphi\varphi}\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) + \left(g_{r\varphi} + g_{\varphi r}\right)\left(r_x\varphi_x + r_y\varphi_y\right) \\
\text{Mit} \quad r &= \sqrt{x^2+y^2} \\
r_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{x}{r} \\
&= \frac{r\cos(\varphi)}{r} \\
&= \cos(\varphi) \\
r_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{y}{r} \\
&= \frac{r\sin(\varphi)}{r} \\
&= \sin(\varphi) \\
r_{xx} &= \frac{r - x r_x}{r^2} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{\cos^2(\varphi)}{r} \\
r_{yy} &= \frac{r - y r_y}{r^2} \\
&= \frac{1}{r} - \frac{\sin^2(\varphi)}{r} \\
\text{Mit} \quad \tan(\varphi) &= \frac{y}{x} \\
\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\varphi_x &= -\frac{y}{x^2} \\
\varphi_x &= -\frac{y}{x^2}\cos^2(\varphi) \\
&= -\frac{\sin(\varphi)}{r} \\
\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\varphi_y &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_y &= \frac{\cos(\varphi)}{r} \\
\varphi_{xx} &= \frac{-\cos(\varphi)\varphi_x r + \sin(\varphi) r_x}{r^2} \\
&= \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi)}{r^2} \\
\varphi_{yy} &= \frac{-\sin(\varphi)\varphi_y r - \cos(\varphi) r_y}{r^2} \\
&= \frac{-\sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2} \\
\Longrightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} &= g_r\left(\frac{1}{r}\right) + 0 + g_{rr} + g_{\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\right) + 0 \\
&= g_{rr} + \frac{1}{r} g_r + \frac{1}{r^2} g_{\varphi\varphi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r g_r) + \frac{1}{r^2} g_{\varphi\varphi}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe :

(a)

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla u) &= \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \\ \partial_3 u \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 u - \partial_3\partial_2 u \\ \partial_3\partial_1 u - \partial_1\partial_3 u \\ \partial_1\partial_2 u - \partial_2\partial_1 u \end{pmatrix} \\
&= 0 \quad \text{falls der Satz von Schwarz anwendbar ist.}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_1(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) + \partial_2(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) + \partial_3(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \\
&= \partial_1\partial_2 v_3 - \partial_1\partial_3 v_2 + \partial_2\partial_3 v_1 - \partial_2\partial_1 v_3 + \partial_3\partial_1 v_2 - \partial_3\partial_2 v_1 \\
&= 0 \quad \text{falls der Satz von Schwarz anwendbar ist.}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (u\mathbf{v}) &= \partial_1(u\mathbf{v}) + \partial_2(u\mathbf{v}) + \cdots + \partial_n(u\mathbf{v}) \\
\text{Produktregel:} \quad &= \partial_1 u v_1 + u\partial_1 v_1 + \partial_2 u v_2 + u\partial_2 v_2 + \cdots + \partial_n u v_n + u\partial_n v_n \\
&= \partial_1 u v_1 + \partial_2 u v_2 + \cdots \partial_n u v_n + u\partial_1 v_1 + u\partial_2 v_2 + \cdots + \partial_n v_n \\
&= (\nabla u) \cdot \mathbf{v} + u \nabla \cdot \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

(d)

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_2(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) - \partial_3(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \\ \partial_3(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) - \partial_1(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \\ \partial_1(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) - \partial_2(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_2\partial_1 v_2 - \partial_2\partial_2 v_1 - \partial_3\partial_3 v_1 + \partial_3\partial_1 v_3 - \partial_1\partial_1 v_1 + \partial_1\partial_1 v_1 \\ \partial_3\partial_2 v_3 - \partial_3\partial_3 v_2 - \partial_1\partial_1 v_2 + \partial_1\partial_2 v_1 - \partial_2\partial_2 v_2 + \partial_2\partial_2 v_2 \\ \partial_1\partial_3 v_1 - \partial_1\partial_1 v_3 - \partial_2\partial_2 v_3 + \partial_2\partial_3 v_2 - \partial_3\partial_3 v_3 + \partial_3\partial_3 v_3 \end{pmatrix} \\
\text{Satz von Schwarz} &= \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2 v_2 + \partial_1\partial_3 v_3 + \partial_1\partial_1 v_1 \\ \partial_2\partial_3 v_3 + \partial_2\partial_1 v_1 + \partial_2\partial_2 v_2 \\ \partial_3\partial_1 v_1 + \partial_3\partial_2 v_2 + \partial_3\partial_3 v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \partial_1(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3) \\ \partial_2(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3) \\ \partial_3(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3) \end{pmatrix} - \Delta\mathbf{v} \\
&= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \nabla \cdot \begin{pmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \\
&= \nabla \cdot \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \\
&= \partial_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + \partial_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + \partial_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
\text{Produktregel:} &= \partial_1 v_2 w_3 + v_2 \partial_1 w_3 - \partial_1 v_3 w_2 - v_3 \partial_1 w_2 + \partial_2 v_3 w_1 + v_3 \partial_2 w_1 \\
&\quad -\partial_2 v_1 w_3 - v_1 \partial_2 w_3 + \partial_3 v_1 w_2 + v_1 \partial_3 w_2 - \partial_3 v_2 w_1 - v_2 \partial_3 w_1 \\
&= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) w_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) w_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) w_3 \\
&\quad -(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) v_1 - (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) w_2 - (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) v_3 \\
&= (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{w})
\end{aligned}$$

3. Aufgabe :

(a) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \mathbf{0} \\
\begin{pmatrix} 8x^3 - 2x \\ 4y^3 - 4y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad x_1 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad y_1 &= 0 \\
8x^2 - 2 &= 0 \\
x^2 &= \frac{1}{4} \\
\Longrightarrow \quad x_2 &= \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow \quad x_3 &= -\frac{1}{2} \\
4y^2 - 4 &= 0 \\
y^2 &= 1 \\
\Longrightarrow \quad y_2 &= 1 \\
\Longrightarrow \quad y_3 &= 1
\end{aligned}$$

extremwertverdächtige Stellen: $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}, \; i, j = 1, 2, 3$

Hesse-Matrix:

$$\begin{array}{lllllll}
f_{xx} & = & 24x^2 - 2 & \qquad & f_{xy} & = & 0 \\
f_{yx} & = & 0 & & f_{yy} & = & 12y^2 - 4
\end{array}$$

Maximum: $f(x, y) = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = -4$$

Sattelpunkt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 8$$

Sattelpunkt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = -2, \; \lambda_2 = 8$$

Sattelpunkt:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 4, \; \lambda_2 = -4$$

Minimum: $f(x, y) = -\frac{9}{8}$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 4, \; \lambda_2 = 8$$

Minimum: $f(x, y) = -\frac{9}{8}$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 4, \; \lambda_2 = 8$$

Sattelpunkt:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \implies H\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = -4$$

Minimum: $f(x, y) = -\frac{9}{8}$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \implies H\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 8$$

Minimum: $f(x, y) = -\frac{9}{8}$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \implies H\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 8$$

(b) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \mathbf{0} \\
2\begin{pmatrix} 2x^3 - x - y \\ 2y^3 - x - y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
(1) - (2) & \\
2x^3 - x - y - 2y^3 + x + y &= 0 \\
x^3 &= y^3 \\
x &= y \\
\text{aus } (1) & \\
2x^3 - 2x &= 0 \\
\implies x_1 &= 0 \\
\implies y_1 &= 0 \\
2x^2 - 2 &= 0 \\
\implies x_2 &= 1 \\
\implies y_2 &= 1 \\
\implies x_3 &= -1 \\
\implies y_3 &= -1
\end{aligned}$$

Hesse-Matrix:

$$\begin{aligned}
f_{xx} &= 12x^2 - 2 & f_{xy} &= -2 \\
f_{yx} &= -2 & f_{yy} &= 12y^2 - 2
\end{aligned}$$

1. Stelle:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \implies \text{indefinit}$$

Keine Entscheidung möglich mit diesem Kriterium

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - (-4)\lambda + 0 &= 0 \\
\lambda^2 + 4\lambda &= 0 \\
\lambda_1 &= 0 \\
\lambda_2 &= -4
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ höchstens Maximum möglich.
Betrachte Funktionswerte in einer Umgebung von $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 \qquad f(0,0) = 0$$

Wähle $x = \varepsilon$, $y = -\varepsilon \Longrightarrow f(\varepsilon, -\varepsilon) = 2\varepsilon^4 > 0$
Also gibt es in jeder Umgebung von $(0,0)$ positive Funktionswerte, die Funktion hat dort kein Extremum.
$\Longrightarrow f$ hat einen Sattelpunkt in $(0,0)$.

2. Stelle:

$$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(H) &= 0 \\
\lambda^2 - 20\lambda + 96 &= 0 \\
\lambda_{1,2} &= 10 \pm 2 \ > \ 0 \\
\Longrightarrow \text{EW positiv} & \\
\Longrightarrow \text{Minimum} &
\end{aligned}$$

3. Stelle:

$$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad H\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & -2\\ -2 & 10\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ analog zur 2. Stelle, Minimum $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$