Lösungen zum 30. Präsenzblatt für MfI 3

1. Aufgabe :

   (a) Da

   $$\|A\|_p \quad := \quad \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n, \mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p},$$

   folgt, dass

   $$\|A\|_p \quad \geq \quad \frac{\|A\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

   Daraus folgt,

   $$\|A\|_p \|\mathbf{x}\|_p \quad \geq \quad \|A\mathbf{x}\|_p,$$

   da $\|\mathbf{x}\|_p \neq \mathbf{0}$ und damit $\|\mathbf{x}\|_p > \mathbf{0}$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

   (b)

   $$\begin{aligned}
   A &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -13 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
   \|A\|_\infty &= \max_{1,2,3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| \\
   &= \max\{18, 12, 7\} \\
   &= 18 \\
   \|A\|_F &= \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij}^2 \right) \\
   &= \sqrt{265} \\
   &\approx 16.278821 \\
   \|A\|_1 &= \max_{1,2,3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| \\
   &= \max\{6, 9, 22\} \\
   &= 22
   \end{aligned}$$

2. Aufgabe :

$$
\begin{aligned}
M &= D \\
&= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
N &= -(L+U) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Jacobi–Verfahren:

$$
\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\left(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\right)
$$

$$
\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \\ x_4^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ x_4^{(k)} \end{pmatrix}\right]
$$

Verfahren:

$$
\begin{aligned}
k &= 0 \\
\mathbf{x}^{(1)} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
k &= 1 \\
\mathbf{x}^{(2)} &= \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
k &= 2 \\
\mathbf{x}^{(3)} &= \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
k &= 3 \\
\mathbf{x}^{(4)} &= \frac{15}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
k &= 4 \\
\mathbf{x}^{(5)} &= \frac{31}{32}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
k &= 5 \\
\mathbf{x}^{(6)} &= \frac{63}{64}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \\
k &= n \\
\mathbf{x}^{(n+1)} &= \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Fehler berechnen:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)}\|_2 &= \|\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}\|_2 \\
&= \sqrt{4(1-\lambda)^2} \\
&= 2(1-\lambda)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{2} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(1)}\|_2 &= 1 \\
\lambda &= \frac{3}{4} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(2)}\|_2 &= \frac{1}{2} \\
\lambda &= \frac{7}{8} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(3)}\|_2 &= \frac{1}{4} \\
\lambda &= \frac{15}{16} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(4)}\|_2 &= \frac{1}{8} \\
\lambda &= \frac{31}{32} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(5)}\|_2 &= \frac{1}{16} \\
\lambda &= \frac{63}{64} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(6)}\|_2 &= \frac{1}{32} \\
\lambda &= \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \\
\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(n+1)}\|_2 &= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$