Lösungen zum 28. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\pi}x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2a}{\pi}x + 2a & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{2a}{\pi}x - 4a & \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \end{cases}$$

Bestimmung der Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}(u,1) \\ &= \int_0^{2\pi} u(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 \\ a_k &= \frac{1}{\pi}(u,\cos(kx)) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{\pi}x\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-\frac{2a}{\pi}x + 2a\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{2a}{\pi}x - 4a\right)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right] \end{aligned}$$

Integrale einzeln betrachten:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{\pi}x\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{a}{\pi k^2}\left(2\cos(\frac{\pi}{2}k) + \pi k\sin(\frac{\pi}{2}k) - 2\right) \\ 2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{\pi k^2}\left(2\pi k\sin(\frac{3\pi}{2}k) - 2\pi k\sin(\frac{\pi}{2})\right) \\ -\frac{2a}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2a}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\ &= \frac{a}{\pi k^2}\left(-2\cos(\frac{3}{2}\pi k) - 3\pi k\sin(\frac{3}{2}\pi k) + 2\cos(\frac{\pi}{2}k) + \pi k\sin(\frac{\pi}{2}k)\right) \\ -4a\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{\pi k}\left(4\pi k\sin(\frac{3}{2}\pi k)\right) \\ \frac{2a}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x\sin(kx)}{k}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{a}{\pi k^2}\left(2 - 2\cos(\frac{3}{2}\pi k) - 3k\pi\sin(\frac{3}{2}\pi k)\right) \end{aligned}$$

Zusammenfassen der Ergebnisse ergibt $a_k = 0$.

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}(u, \sin(kx)) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{\pi}x\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(-\frac{2a}{\pi}x + 2a\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(\frac{2a}{\pi}x - 4a\right)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}$$

Integrale einzeln betrachten:

$$\begin{aligned}
\frac{2a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2a}{\pi k^2}\sin(k\frac{\pi}{2}) - \frac{a}{k}\cos(k\frac{\pi}{2}) \\
-\frac{2a}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= -\frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= -\frac{2a}{\pi k^2}\sin(\frac{3\pi}{2}k) + \frac{3a}{k}\cos(\frac{3\pi}{2}k) + \frac{2a}{\pi k^2}\sin(\frac{\pi}{2}k) - \frac{a}{k}\cos(\frac{\pi}{2}k) \\
2a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(kx)\,\mathrm{d}x &= 2a\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= -\frac{2a}{k}\cos(\frac{3\pi}{2}k) + \frac{2a}{k}\cos(\frac{\pi}{2}k) \\
\frac{2a}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x &= \frac{2a}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{x\cos(kx)}{k}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
&= -\frac{2a}{\pi k^2}\sin(\frac{3\pi}{2}k) + \frac{2a}{\pi k^2}\sin(2\pi k) + \frac{3a}{k}\cos(\frac{3\pi}{2}k) - \frac{4a}{k}\cos(2\pi k) \\
-4a\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x &= -4a\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \\
&= \frac{4a}{k}\cos(2\pi k) - \frac{4a}{k}\cos(\frac{3\pi}{2}k)
\end{aligned}$$

Zusammenfassen der Ergebnisse ergibt:

$$b_k = \frac{8a}{\pi^2 k^2}\sin(\frac{\pi}{2}k)$$

Fourierreihe:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

2. Aufgabe :

(a) $\mathbb{O}(n)$ ist eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$

i. $\mathbb{O}(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$, da alle $A \in \mathbb{O}(n)$ invertierbar sind und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt.

ii. für A, $B \in \mathbb{O}(n)$ gilt $AB \in \mathbb{O}(n)$, da gilt

$$(AB)^T = B^T A^T = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

iii. für $A \in \mathbb{O}(n)$ gilt $A^{-1} \in \mathbb{O}(n)$, da gilt

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^T = A = \left(A^{-1}\right)^{-1}$$

(b) $S\mathbb{O}(n)$ ist eine Untergruppe von $GL(n,\mathbb{R})$

i. $S\mathbb{O}(n) \subset GL(n,\mathbb{R})$, da $S\mathbb{O}(n) \subset \mathbb{O}(n)$

ii. für A, $B \in S\mathbb{O}(n)$ gilt $AB \in S\mathbb{O}(n)$, da gilt

$$\det(AB) = \det A \det B = 1$$

iii. für $A \in S\mathbb{O}(n)$ gilt $A^{-1} \in S\mathbb{O}(n)$, da gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$$

3. Aufgabe :
Für $\theta = \frac{3}{4}\pi = 135°$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{y} &= Q\mathbf{x} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
Q^{-1} &= Q^T \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} &= Q^{-1}\mathbf{y} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für $\theta = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\mathbf{y} &= Q\mathbf{x} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\
Q^{-1} &= Q^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} &= Q^{-1}\mathbf{y} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ 6 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$