# Lösungen zu den 27. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{a}_2 - \frac{(\mathbf{a}_2, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
&= \mathbf{a}_2 - \frac{-3}{3}\mathbf{v}_1 \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{a}_3 - \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{a}_3, \mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 \\
&= \mathbf{a}_3 - \frac{6}{3}\mathbf{v}_1 - \frac{(-1)}{2}\mathbf{v}_2 \\
&= \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{q}_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{q}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{q}_3 &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe:

(a) Projiziert man den Punkt $Q$ auf die Gerade $g$, erhält man als Projektion den Fußpunkt des Lotes von $Q$ auf $g$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{q}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}\mathbf{b} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2+1^2+1^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Ebene in Normalform:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{n}$$

Hesse NF:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hilfsgerade mit $P$ als Aufpunkt senkrecht zu $E$

$$hg : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schneide $hg$ und $E$ :

Durchstoßpunkt:

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \\
\mathbf{x}_0 &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

**Bonusaufgaben**

1. Aufgabe :
   partielle Integration liefert:

$$\int \ln(x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
u &= \ln(x) \\
u' &= \frac{1}{x} \\
\int \ln(x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \ln(x)\ln(x) - \int \ln(x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
I &= \ln(x)\ln(x) - I \\
2I &= \ln(x)\ln(x) \\
I &= \frac{1}{2}\,(\ln(x))^2 \\
\int \ln(x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln^2|x| + C
\end{aligned}$$

2. Aufgabe:
   Die Vektoren sind linear unabhängig, da die Determinante der Matrix $A = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ungleich Null ist.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 1\cdot(-2)\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot(-2)\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 1 - (-1)\cdot 2\cdot 1 \\
&= 4
\end{aligned}$$