Lösungen zu den 25. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe:

1. Fall : $a, b \in \mathbb{R} \setminus 0$, $c \in \mathbb{R}$:
   Dann ist $x = \dfrac{c - by}{a}$ und $y = \dfrac{c - ax}{b}$. Dies sind die Lösungen des Gleichungssystems. Zu jedem vorgegebenen Wert x läßt sich ein bestimmter Wert y berechnen und umgekehrt.

2. Fall : $a \in \mathbb{R} \setminus 0$, $b = 0$ und $c \in \mathbb{R}$:
   Dann ist $ax = c$ mit $x = \dfrac{c}{a}$. Das Gleichungssystem hat also die Lösung $x = \dfrac{c}{a}$ und y kann beliebig geählt werden.

3. Fall : $a = 0$, $b \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $c \in \mathbb{R}$:
   Dann ist $by = c$ mit $\dfrac{c}{b}$. Das Gleichungssystem hat also die Lösung $x = \dfrac{c}{b}$ und x kann beliebig geählt werden.

3. Fall : $a = 0$, $b = 0$ und $c = 0$:
   Dann ist $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, also $0 + 0 = 0$. Dies liefert die wahre Aussage $0 = 0$ und x und y können beliebig gewählt werden.

3. Fall : $a = 0$, $b = 0$ und $c \in \mathbb{R} \setminus 0$:
   Dann ist $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 + 0 = 0 = c$. Aus $c \neq 0$ folgt, dass dies nie stimmen kann und das Gleichungssystem somit in diesem Fall nicht lösbar ist.

2. Aufgabe:

(a) Aus Zeile (3) folgt, dass $y + z = 0$ ist. Dann folgt aus (5), $x = -1$ und aus (2), $y = 1$. Damit folgt aus (3), $z = -1$.
Falls das Gleichungssystem eine Lösung hat, so ist diese:

$$x = -1, \qquad y = 1, \qquad z = -1.$$

Die Probe bestätigt diese Lösung. Da das zugehörige homogene Gleichungssystem nur die triviale Lösung hat, ist:

$$\tau_0 = (-1, 1, -1)^T \text{ und damit } \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 8 & -7 & 7 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1/2 & -5/2 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 13/2 & -4 & 11/2 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & 23/2 & 4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & -13 & 6 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 9 & -5 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -8 & 11 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 26 & -18 & 28 & 8 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & -12 & -5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -15 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & -24 & -5 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5/8 \end{array}\right)$$

Das Schema des Gleichungssystems wurde durch Umformungen auf die Stufenform gebracht und es ergeben sich für das System folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= -\frac{3}{8} \\ c &= -\frac{1}{8} + s \\ d &= -\frac{5}{8} + 3s \\ e &= s, \qquad\qquad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Mit den Unbekannten a, b, c, d, e, wobei man eine der Unbekannten c, d, e als freien Parameter wählen muss.
Eine Lösung des homogenen Gleichungssystems ist demnach

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= s \\ d &= 3s \\ e &= s, \qquad\qquad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung L des inhomogenen Gleichungssystems ist

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8}+s \\ -\frac{5}{8}+3s \\ s \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \\ 3s \\ s \end{pmatrix} \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

3. Aufgabe :

(a) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sind linear unabhängig, also ist E_1 wirklich eine Ebene.

$$E_1 : P_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 \qquad g_1 : P_2 + \nu \mathbf{w}_1$$

Es wird die Lösung des linearen Gleichungssystems gesucht:

$$P_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 - P_2 - \nu \mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$$

oder

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu - \nu &= 0 \\ 2\lambda + 2\mu - \nu &= 0 \\ 3\lambda + \mu &= \underbrace{1}_{P_2 - P_1} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \mu = \frac{1}{4}, \quad \nu = 1$$

$\Longrightarrow$ aus E_1:

$$\begin{aligned} P_1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

aus g_1 :

$$\begin{aligned} P_2 + \mathbf{w}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Durchschnitt von E_1 und g_1 ist der Punkt $(1, 1, 1)^T$

(b) Analog zu (a) erhält man:

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu &= 0 \\ 2\lambda + 2\mu - \nu &= 0 \\ 3\lambda + \mu - 2\nu &= 1 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, daher gilt:

$$E_1 \cap g_2 = \emptyset$$

(c) g_1 und g_2 haben P_2 als gemeinsamen Punkt. Demzufolge liegen sie in einer Ebene. Da $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ zudem linear unabhängig sind, spannen g_1 und g_2 sogar eine Ebene auf.

Die Frage nach dem Durchschnitt von E_1 und E_2 führt auf die Frage nach der Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$E_1 : P_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 E_2 : P_2 + \nu \mathbf{w}_1 + \xi \mathbf{w}_2$$

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu - \nu &= 0 \\ 2\lambda + 2\mu - \nu - \xi &= 0 \\ 3\lambda + \mu - 2\xi &= 1 \end{aligned}$$

$$\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 - \nu \mathbf{w}_1 - \xi \mathbf{w}_2 = P_2 - P_1$$

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\xi \\ \mu &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\xi \\ \nu &= 1 \end{aligned}$$

Da ein Parameter existiert, erhalten wir eine Gerade. In E_1:

$$\begin{aligned} P_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{6}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} - \xi \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In E_2:

$$\begin{aligned} P_2 + \nu \mathbf{w}_1 + \xi \mathbf{w}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Gerade

$$h : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Durchschnitt der beiden Ebenen.

(d) Es ist:

$$E_1 : P_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 E_3 : P_3 + \nu \mathbf{u}_1 + \xi \mathbf{u}_2$$

Analog zu (c):

$$\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 - \nu \mathbf{u}_1 - \xi \mathbf{u}_2 = P_3 - P_1$$

$$\begin{aligned} \lambda + 3\mu - \nu &= 1 \\ 2\lambda + 2\mu - \xi &= 0 \\ 3\lambda + \mu - \nu &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi \\ \mu &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi \\ \nu &= -\frac{1}{2} + \xi \end{aligned}$$

In E_1:

$$\begin{aligned} P_1 + \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{2}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In E_3:

$$\begin{aligned} P_3 + \nu \mathbf{u}_1 + \xi \mathbf{u}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Gerade

$$h_1 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durchschnitt der beiden Ebenen.