Lösungen zu den 23. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe:

   (a) Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da es keine reelle Zahl gibt mit
   $$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   (b) Die beiden Vektoren sind linear unabhängig, da es keine reelle Zahl gibt mit
   $$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Die drei Vektoren sind linear unabhängig, da für das System
   $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   nur die triviale Lösung existiert:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

   (d) Da die Dimension des $\mathbb{R}^3$ drei ist, kann ein linear unabhängiges System aus maximal drei Vektoren bestehen. Alle Systeme, die mehr Vektoren besitzen sind linear abhängig.

2. Aufgabe:
   Falls $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ in der linearen Hülle von $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_4$ liegen, müssen reelle Zahlen a, b, c, d, e, f, g und h existieren, so dass
   $$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= a\mathbf{a}_1 + b\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_3 + d\mathbf{a}_4 \\ \mathbf{b}_2 &= e\mathbf{a}_1 + f\mathbf{a}_2 + g\mathbf{a}_3 + h\mathbf{a}_4 \end{aligned}$$
   Dies führt auf die Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme:
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   und
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wählt man für die freien Parameter $d = 0$ und $h = 0$, liefert dies:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -1 \\ c &= 0 \\ e &= -2 \\ f &= 0 \\ g &= 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt das die beiden Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ in der linearen Hülle von $\mathbf{a}_1$, …, $\mathbf{a}_4$ liegen. Nach dem Basisergänzungssatz kann man $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ zu einer Basis von U ergänzen. Es ist immer die lineare Unabhängigkeit, der bereits vorhandenen Vektoren der Basis und des gewählten Vektors zur Basisergänzung zu überprüfen.

$\mathbf{a}_1$ ist linear unabhängig von $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ (wegen der dritten Komponente) und wird zur Basis hinzugenommen. Die Vektoren $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ und $\mathbf{a}_4$ sind linear abhängig von dem System $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ und werden folglich nicht zur Basis hinzugenommen.

Das System $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ ist also eine Basis von U, während U ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ ist.