Lösungen zu den 22. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

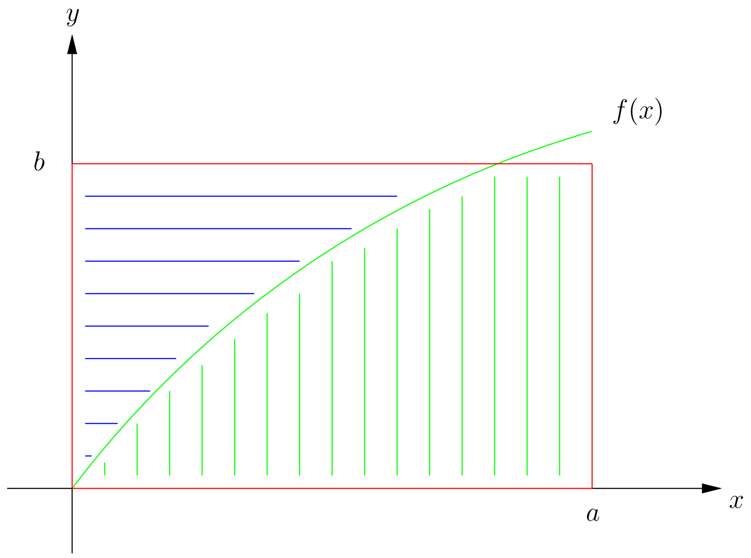

Abbildung 1:

zu Abbildung 1:

- rotes Viereck: $a \cdot b$
- grüne Schraffur: $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
- blaue Schraffur : $\int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x$

zu Abbildung 2:

- f ist streng monoton wachsend
- f^{-1} streng monoton wachsend
- $f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} > 0$
- Es gilt im Fall $b \leq f(a)$ (siehe zu Abbildung 3):

$$\begin{aligned}
af(a) &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x + (f(a)-b)a \\
&= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x + af(a) - ab \\
ab &\leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

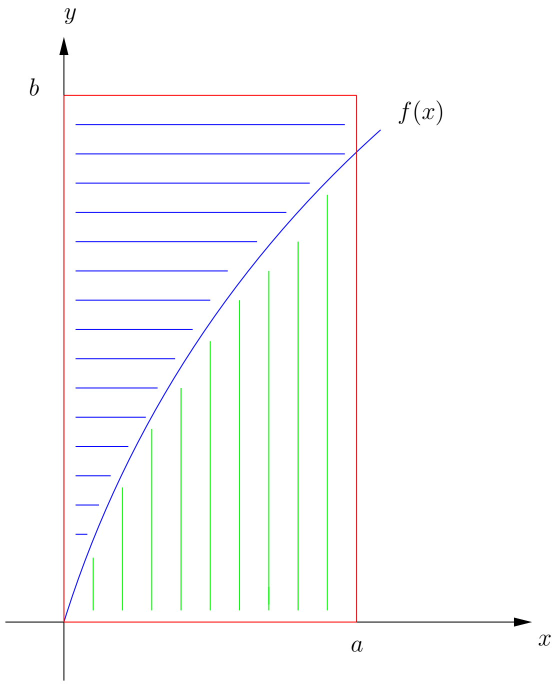

Abbildung 2:

Da gilt:

$$\begin{aligned}\int_b^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x &\leq (f(a)-G)\sup_{x\in[b,\,f(a)]}\left|f^{-1}(a)\right| \\ &= (f(a)-G)\,a\end{aligned}$$

- Fall $b > f(a)$ (siehe zu Abbildung 4):

$$\begin{aligned}af(a) &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(a)} f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{f(a)}^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x - (b-f(a))a \\ &= \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x - ab + af(a) \\ ab &\leq \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^b f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- Spezialfall: $y = f(x) = x^{p-1} \quad x = f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{p-1}}$

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{p}x^p\right]_0^a \\ &= \frac{a^p}{p} \\ \int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^b y^{\frac{1}{p-1}}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

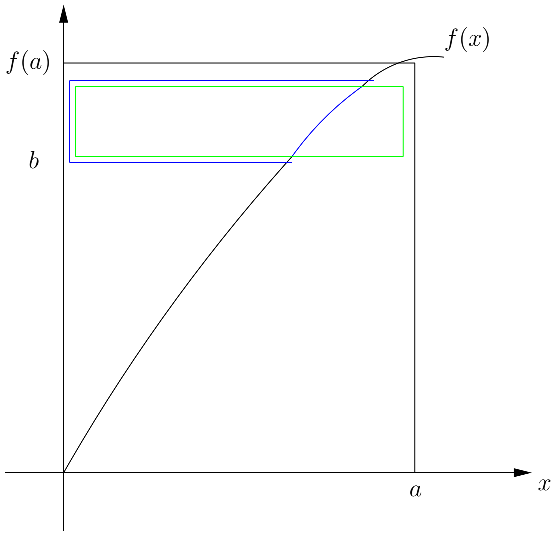

Abbildung 3:

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y \\
&\quad \text{mit } \frac{1}{p-1} = q-1 \\
&= \left[\frac{y^q}{q}\right]_0^b \\
&= \frac{b^q}{q}
\end{aligned}
$$

mit Youngscher Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
ab &\leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \\
\text{mit} & \\
p &> 1 \\
q &= \frac{1}{p-1} + 1 \\
&= \frac{p}{p-1} \\
\frac{1}{q} &= \frac{p-1}{p} \\
&= 1 - \frac{1}{p} \\
\iff \quad 1 &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}
\end{aligned}
$$

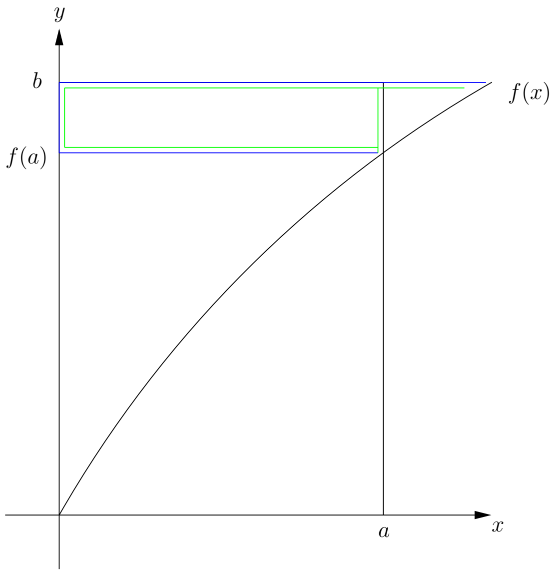

Abbildung 4:

2. Aufgabe :

(a):

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\left(\int_{0}^{3}\frac{1}{2}x^2+y^2\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}yx^2+\frac{1}{3}y^3\right]_0^3\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^2+9\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3}{6}x^3+9x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(\frac{3}{6}+9\right)-\left(-\frac{3}{6}-9\right) \\
&= 19
\end{aligned}$$

(b):

$$\begin{aligned}
\int_0^2\int_{-3}^{-1}\left(\int_8^{10}-\frac{5x^3+10y^3}{z^2}\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2\int_{-3}^{-1}\left[-\frac{5x^3+10y^3}{z}\right]_8^{10}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2\left(\int_{-3}^{-1}-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}y^3\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2\left[-\frac{1}{8}x^3y-\frac{1}{16}y^4\right)_{-3}^{-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2-\frac{1}{4}x^3+5\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \left[-\frac{1}{16}x^4 + 5x\right]_0^2$$

$$= 9$$

3. Aufgabe :

(a)

i. Es sei $\lambda = 0$ und $\mathbf{v} \in V$ beliebig. Es ist:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ (0+0)\mathbf{v} &= 0 \cdot \mathbf{v} \\ 0 \cdot \mathbf{v} + 0 \cdot \mathbf{v} &= 0 \cdot \mathbf{v} \\ 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} & \end{aligned}$$

Es sei $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ und λ ein beliebiges Element aus K. Es ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{u} \\ \lambda(\mathbf{u} + \mathbf{0}) &= \lambda\mathbf{u} \\ \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{0} &= \lambda\mathbf{u} \\ \lambda\mathbf{0} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, wenn $\lambda = 0$ oder $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, so ist $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

ii. Angenommen, es seien $\lambda \neq 0$ und $\lambda v \neq \mathbf{0}$, sowie $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Da $\lambda \neq 0$, existiert λ^{-1} und damit:

$$\begin{aligned} \lambda^{-1}\lambda\mathbf{v} &= \mathbf{0}\lambda^{-1} \\ 1\mathbf{v} &= \mathbf{0}\lambda^{-1} \\ 1\mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Da $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ ist, folgt $\mathbf{v} = \mathbf{0}$; im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b)

i. Die Menge ist kein Unterraum, da für $\mathbf{0}$ gilt: $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$
ii. Die Menge ist ein Unterraum.
iii. Die Menge ist kein Unterraum, da für $\mathbf{0}$ gilt: $5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 = 0 \neq 14$
iv. Die Menge ist ein Unterraum und enthält nur $\mathbf{0}$ als Element.