Lösungen zu den 20. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe: indirekter Beweis
   Annahme, es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0 > 0$. Da f stetig ist, gibt es eine δ–Umgebung um x_0, die ganz in $[a, b]$ enthalten ist und in der $f(x) \geq \dfrac{y_0}{2}$ gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\delta}^{b} f(x)\mathrm{d}x \\ &\geq 0 + 2\delta\frac{y_0}{2} + 0 \\ &= \delta y_0 \quad > \quad 0 \end{aligned}$$

   Das ist ein Widerspruch, also gibt es kein derartiges x_0.

2. Aufgabe:

   (a) Hinweis:
   Man beachte, dass $F(x) = x\ln(x) - x$ eine Stammfunktion des Logarithmus ist.

   Das uneigentliche Integral wird bestimmt, indem zunächst die Integration von einem beliebigen $a > 0$ bis zu 1 ausgeführt wird und dann der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln(x)\mathrm{d}x$$

   bestimmt wird. Dabei ist $a > 0$ und der rechtsseitige Grenzwert zu nehmen, weil man aus dem Inneren des Integrationsintervalls $[0, 1]$ kommen muss. Man berechnet daher zunächst unter Benutzung der angegebenen Stammfunktion

$$\int_a^1 \ln(x)\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_a^1 = (\ln(1)-1)-(a\ln(a)-a) = -1-a\ln(a)+a$$

   Nun betrachtet man den rechtsseitigen Grenzwert in 0 und erhält so den gesuchten Wert des uneigentlichen Integrals,

$$\int_0^1 \ln(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} (-1 - a\ln(a) + a) = -1$$

   Dabei wurde benutzt, dass $\lim_{a\to 0^+} a\ln(a) = 0$, was mit der Regel von l'Hospital berechnet werden kann:

$$\lim_{a\to 0^+} a\ln(a) = \lim_{a\to 0^+} \frac{\ln(a)}{\frac{1}{a}} = \lim_{a\to 0^+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = \lim_{a\to 0^+} (-a) = 0$$

(b) Man berechnet zunächst die Integration von 0 bis zu einem beliebigen $A > 0$ und dann den Grenzwert

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

Man berechnet daher zuerst

$$\int_0^A x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Die Substitution $t = x^2$ mit $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$ ergibt $t\,\mathrm{d}t = 2x^3\,\mathrm{d}x$ und daher

$$\int_0^A x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^{A^2} t e^{-t} \mathrm{d}t.$$

Für das verbleibende Integral ist partielle Integration geeignet:

$$\begin{aligned}
\int_0^{A^2} t e^{-t} \mathrm{d}t &= \left[-te^{-t}\right]_0^{A^2} - \int_0^{A^2} \left(-e^{-t}\right) \mathrm{d}t \\
&= -A^2\, e^{-A^2} + 0 - \left[e^{-t}\right]_0^{A^2} \\
&= -A^2\, e^{-A^2} - e^{-A^2} + 1
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\int_0^A x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(-A^2\, e^{-A^2} - e^{-A^2} + 1\right)$$

Man betrachtet nun den Grenzwert für $A \to \infty$ und erhält den gesuchten Wert des uneigentlichen Integrals,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x &= \lim_{A\to\infty} \int_0^A x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x \\
&= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{2} \left(-A^2\, e^{-A^2} - e^{-A^2} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2} (0 + 0 + 1) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$