Lösungen zu den 20. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :
   Es ist

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= x^2 \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t + 2x \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(x^2 f^2(t) + 2xf(t)g(t) + g^2(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b (xf(t) + g(t))^2 \, \mathrm{d}t \quad \geq 0
\end{aligned}
$$

   Der Ausdruck $P_2(x)$ ist quadratisch in x, sowie nach dem eben gezeigten nicht negativ:

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= px^2 + qx + r \quad \geq 0 \\
p &= \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \\
q &= 2\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \\
r &= \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

   Aus der Lösungstheorie für quadratische Gleichungen folgt, dass die Diskriminante nicht positiv ist:

$$
\begin{aligned}
D &= \frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p} \leq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{q^2}{4} - rp \leq 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{q^2}{4} \leq rp
\end{aligned}
$$

   Setzt man ein, so erhält man

$$
\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \cdot \int_a^b g^2(t)\mathrm{d}t
$$

2. Aufgabe :
   Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{t(4-t)} = \frac{1}{4t-t^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{4-t} \qquad \Longrightarrow \qquad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \qquad \int \frac{\mathrm{d}t}{4t-t^2} &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{4-t} \\
&= \frac{1}{4}\ln|t| - \frac{1}{4}\ln|t-4| + C \\
\Longrightarrow \qquad \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{4t-t^2} &= \left[\frac{1}{4}\ln|t|\right]_2^x - \left[\frac{1}{4}\ln|t-4|\right]_2^x \\
&= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-4| - \frac{1}{4}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln(2) \qquad (1)
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x-4| &= -\frac{1}{4}\ln(3) \\
\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-4}\right| &= -\frac{1}{4}\ln(3) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Gleichheit genau dann, wenn: $\left|\frac{x}{x-4}\right| = \frac{1}{3}$

(a)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-4} &= \frac{1}{3} \\
3x &= x-4 \\
2x &= -4 \\
x &= -2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x-4} &= -\frac{1}{3} \\
-3x &= x-4 \\
-4x &= -4 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

Im Fall $x = -2$ wird über die Polstelle bei $x = 0$ hinwegintegriert. Nach (1) ist das Integral für $x = 0$ nicht konvergent, wegen $\ln|x|$. Deshalb ist $x = -2$ keine Lösung der Aufgabe.

3. Aufgabe :

(a) uneigentliches Integral für $x = 1$ (Pol)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} &\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} \\ &\leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= [\arcsin(x)]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Konvergente Majorante gefunden $\Longrightarrow$ Integral ist konvergent

(b) uneigentlich, da unbeschränktes Integrationsgebiet
Endliches eilintervall für Konvergenz nicht interessant. Betrachte:

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x^3 \geq 1 + x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2+x^3} \leq \frac{1}{1+x^3}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x &\geq \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+x^3}}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \frac{x}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^\infty \\ &= \infty\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Divergente Minorante gefunden, Integral divergiert.

(c) uneigentliche für $x = 0$ (Pol)
Betrachte wegen Symmetrie nur $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}} \quad = \quad 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \quad = \quad 4 \quad \Longrightarrow \quad \text{konvergent}$$