Lösungen zum 18. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = x - \frac{1}{d} f(x) = g(x)$$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu zeigen: $d(g(x),\, g(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$ mit $0 \leq \alpha < 1$.

$$\begin{aligned}
d(g(x), g(y)) &= \left| x - \frac{1}{d} f(x) - \left(y - \frac{1}{d} f(y) \right) \right| \\
&= \left| x - y - \frac{1}{d} \left(f(x) - f(y) \right) \right| \\
&\overset{\text{MWS Diff}}{=} \left| x - y - \frac{1}{d} f'(\xi)(x - y) \right| \\
&= |x - y| \left| 1 - \frac{1}{d} f'(\xi) \right| \qquad \text{wegen Vor. an} f'(\xi) \\
&= \left(1 - \frac{1}{d} f'(\xi) \right) |x - y| \\
&\leq \underbrace{\left(1 - \frac{c}{d} \right)}_{\alpha < 1} |x - y| \\
&= \alpha\; d(x, y)
\end{aligned}$$

Nach dem BFP–Satz existiert genau ein Fixpunkt von $x = x - \frac{1}{d} f(x) \Longleftrightarrow f(x) = 0$ ist eindeutig lösbar.

2. Aufgabe:

$$\begin{aligned}
x_0(s) &= 0 \\
x_1(s) &= \frac{5}{6} s \\
x_2(s) &= \frac{35}{36} s \\
x_3(s) &= \frac{215}{216} s \\
x_4(s) &= \frac{1295}{1296} s \\
x_5(s) &= \frac{7775}{7776} s
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x(s) = s$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_0^1 s \cdot t \cdot t \,\mathrm{d}t + \frac{5}{6} s &= \frac{1}{2} s \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^1 + \frac{5}{6} s \\
&= \frac{1}{6} s + \frac{5}{6} s \\
&= s
\end{aligned}$$

3. Aufgabe :
Aus $x^3 = a$ folgt mit $a = 5$, Newton–Verfahren für $f(x) = x^3 - 5$.

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} = x^{(n)} - \frac{\left(x^{(n)}\right)^3 - 5}{3\left(x^{(n)}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 1 - \frac{1^3 - 5}{3 \cdot 1^2} \\ x^{(1)} &= 2.333333333 \\ x^{(2)} &= 1.861678004 \\ x^{(3)} &= 1.722001880 \\ x^{(4)} &= 1.710059737 \end{aligned}$$

Lösung: $\sqrt[3]{5} \approx 1.709975947$

i	$x^{(i)}$	$\left\lvert\sqrt[3]{5} - x^{(i)}\right\rvert$
0	1	0.709975947
1	2.333333333	-0.623357386
2	1.861678004	-0.151702057
3	1.722001880	-0.012025933
4	1.710059737	-0.000083790