Lösungen zu den 17. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe :

(a)

$$\begin{aligned}
\text{Taylor(f,x=0,3)} &= 1 + 2x + 2x^2 + \mathcal{O}(x^4) \\
\text{Taylor(f,x=0,6)} &= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 - 2x^5 + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2(-1+x^2)}{(1-x+x^2)^2} \\
f''(x) &= \frac{4(1-3x+x^3)}{(1-x+x^2)^3} \\
f'''(x) &= -\frac{12x(4-6x+x^3)}{(1-x+x^2)^4}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{Taylor(f,x=0,2)} &= \mathcal{O}(x^2) \\
\text{Taylor(f,x=0,6)} &= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + \frac{119}{72}x^4 + \frac{239}{72}x^5 + \mathcal{O}(x^6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2+3x^2}{2(1-2x+x^3)^{\frac{1}{2}}} - \frac{-3+2x}{3(1-3x+x^2)^{\frac{2}{3}}} \\
f''(x) &= -\frac{(-2+3x^2)^2}{4(1-2x+x^3)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x}{(1-2x+x^3)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(-3+2x)^2}{9(1-3x+x^2)^{\frac{5}{3}}} - \frac{2}{3(1-3x+x^2)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}$$

(c)

$$\text{Taylor(f,x=0,6)} = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\cos(x)x - \sin(x)}{x\sin(x)} \\
f''(x) &= -\frac{x^2 - 1 + \cos^2(x)}{x^2\sin^2(x)} \\
f'''(x) &= \frac{2(-\sin(x) + \sin(x)\cos^2(x) + \cos(x)x^3)}{x^3\sin^3(x)} \\
f^{(IV)}(x) &= -\frac{2(2\cos^2(x)x^4 + x^4 - 3 + 6\cos^2(x) - 3\cos^4(x))}{x^4\sin^4(x)} \\
f^{(V)}(x) &= \frac{8(6\sin(x)\cos^2(x) - 3\sin(x)\cos^4(x) - 3\sin(x) + 2\cos(x)x^5 + \cos^3(x)x^5)}{x^5\sin^5(x)} \\
f^{(VI)}(x) &= \frac{8(2\cos^4(x)x^6 + 11\cos^2(x)x^6 - 15 + 2x^6 + 45\cos^2(x) - 45\cos^4(x) + 15\cos^6(x))}{(-1 + 3\cos^2(x) - 3\cos^4(x) + \cos^6(x)x^6)}
\end{aligned}$$

Bemerkung:
Bei der Lösung der Aufgabe muss sowohl für die Funktion, als auch für die Ableitungen jeweils der Grenzwert für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ betrachtet werden; alle benötigten Grenzwerte existieren auch.

2. Aufgabe :
   Betrachte
$$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$$
   $f(x)$ ist stetig differenzierbar in $(0,\infty)$.
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} \\ &= \infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x} \\ &= 0 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-x^{-2}) - (-1)(1+x)^{-2} \\ &= \frac{-x}{(x+1)x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{(x+1)}\left(\frac{-x-1+x}{x(x+1)}\right) \\ &= \frac{-1}{(x+1)^2 x} \\ &< 0 \quad \forall x \in (0,\infty) \end{aligned}$$
   $\Longrightarrow$ Die Funktion ist streng monoton fallend. Sie hat keine lokale Extremstelle. Da $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty > 0$, darf sie keine negativen Werte annehmen, da sonst wegen der Monotonie $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ nicht gelten kann.

   Einfacher:
$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) = \ln(1+x) - \ln(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2}$$