Lösungen zum 16. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

(a) $f(x) = x\,|x|$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Differenzierbarkeit von $f(x)$, $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -2x & x > 0 \end{cases}$$

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 0^-0} f'(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^-0} -2x & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+0} f'(x) & = & \lim\limits_{x\to 0^+0} 2x & = & 0 \end{array}\right\} f \text{ ist auch für } x = 0 \text{ differenzierbar.}$$

(b) $f(x) = (x - [x])(x - [x])$:
Sei $x = a + b$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq b < 1$. Dann ist

$$f(x) = f(a+b) = b^2, \qquad \text{da } [x] = a.$$

Diese Funktion ist differenzierbar für $0 < b < 1$. Für $b = 0$, also $x = a$ gilt:

$$\left.\begin{array}{lclclcl} \lim\limits_{x\to a^-0} f(x) & = & \lim\limits_{b\to 1} f((a-1)+b) & = & \lim\limits_{b\to 1} b^2 & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to a^+0} f(x) & = & \lim\limits_{b\to 0} f(a+b) & = & \lim\limits_{b\to 0} b^2 & = & 0 \end{array}\right\} f \text{ ist unstetig für } a \in \mathbb{Z}$$

Da f in $a \in \mathbb{Z}$ nicht stetig ist, ist f in $a \in \mathbb{Z}$ nicht differenzierbar.

2. Aufgabe :

(a)

$$f(x) = y = \sin(x) \longrightarrow x = \arcsin(y) = f^{-1}(y) \qquad f'(x) = \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \\ &= \frac{1}{\cos\left(f^{-1}(y_0)\right)} \\ &= \frac{1}{\underbrace{\cos\left(\arcsin(y_0)\right)}_{>0 \text{ in } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin(y_0)\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(b)

$$f(x) = y = \cos(x) \longrightarrow x = \arccos(y) = f^{-1}(y) \qquad f'(x) = -\sin(x)$$

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(y_0) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)} \\
&= -\frac{1}{\sin\left(f^{-1}(y_0)\right)} \\
&= -\frac{1}{\underbrace{\sin\left(\arccos(y_0)\right)}_{>0 \text{ in } (0,\pi)}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos(y_0)\right)}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Aufgabe :

(a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)} &\overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}-1}{1-\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)(1-\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)(1-\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2(x)}{1-\cos(x)} \\
&\overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(x)(1+\tan^2(x))}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan(x)+2\tan^3(x)}{\sin(x)} \\
&\overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2(x))+6\tan^2(x)(1+\tan^2(x))}{\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2+2\tan^2(x)+6\tan^2(x)+6\tan^4(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{2}{1}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x-\sin(x)} = 2$$

(b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\sin(x)} \\
&\overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cos(x)} \\
&\overset{B.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)} \\
&= \frac{0}{2}
\end{aligned}$$

$$\implies \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=0$$