Lösungen zu den 15. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe :

   (a) Stetigkeit in allen Punkten aus $x \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ klar, da dort stetige Funktionen

$$x = 0: \quad \left.\begin{array}{lllll} \lim\limits_{x\to -0} f(x) & = & \lim\limits_{x\to -0}(x+1) & = & 1 \\ \lim\limits_{x\to +0} f(x) & = & \lim\limits_{x\to +0} 3x & = & 0 \end{array}\right\} \text{unstetig in } x = 0$$

$$x = 1: \quad \left.\begin{array}{lllll} \lim\limits_{x\to 1-0} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1-0} 3x & = & 3 \\ \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) & = & \lim\limits_{x\to 1+0} 3-x & = & 2 \end{array}\right\} \text{unstetig in } x = 1$$

   (b) 1. Fall:

$$|x| < 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = -1$$

   2. Fall:

$$|x| = 1 \quad \Longrightarrow \quad x^{2n} = 1 \ \forall n, \quad \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = 0 \ \forall n, \quad \Longrightarrow \quad f(x) = 0$$

   3. Fall:

$$|x| > 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x^{2n} = \infty, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = 1 = f(x)$$

   $f(x)$ ist unstetig in $x \in \{-1,1\}$ sonst stetig.

2. Aufgabe :

   (a) Beschränktheit: $|\sin(x)| \leq 1 \ x \in \mathbb{R}$

   (b) f ist Produkt stetiger Funktionen, also stetig.

   (c) Betrachte $x_0 = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $x = \dfrac{1}{n\pi}$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{lllllll} f(x_0) & = & \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) & = & \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) & = & \pm 1 \\ f(x) & = & \sin(n\pi) & = & 0 & & \end{array}$$

$$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| = \ 1.$$

$$|x - x_0| = \left|\frac{2}{(2n+1)\pi} - \frac{1}{n\pi}\right| = \left|\frac{2n-2n-1}{n(2n+1)\pi}\right| = \frac{1}{n(2n+1)\pi}$$

   Gebe nun $0 < \varepsilon < 1$ vor. Dann kann n so groß gewählt werden, dass

   $\dfrac{1}{n(2n+1)\pi} < \delta(\varepsilon)$ für beliebiges $\delta(\varepsilon) > 0$, aber $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$.

   D.h. $f(x)$ ist nicht glm stetig.