Kapitel 2

Das Flächenintegral

2.1 Motivation, Zurückführung auf ein Doppelintegral

Wir betrachten einen zylindrischen Körper K, der von der Fläche

$$z = f(x, y),$$

seitlich von einer Zylinderfläche mit Erzeugenden parallel zur z–Achse und schließlich von einem ebenen Gebiet Ω in der x–y–Ebene begrenzt wird, siehe Abbildung 2.1. Es soll das Volumen V von K bestimmt werden.

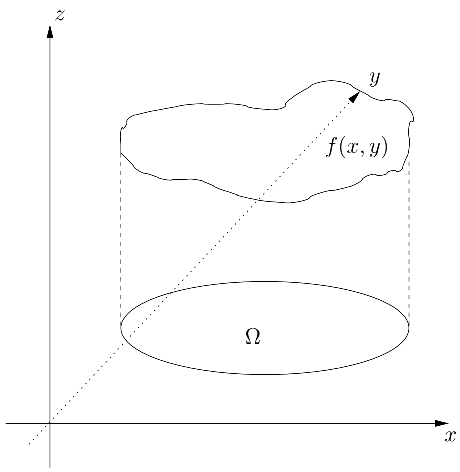

Abbildung 2.1: Volumen unter einer Fläche.

Zur Lösung wird so verfahren, wie wir es vom Riemann–Integral kennen. Wir zerlegen das Grundgebiet Ω in Elemente, berechnen das Volumen über jedem Element näherungsweise (zum Beispiel durch Volumina von Quadern), summieren und führen schließlich einen Grenzübergang (Elemente immer kleiner) durch. Das soll hier nicht im Detail erläutert werden. Falls der Grenzwert für alle zulässigen Zerlegungen existiert und gleich ist, erhält man das Volumen als das Flächenintegral von f über Ω

$$V = \int_\Omega f(x, y)\ d\Omega = \iint_\Omega f(x, y)\ d\Omega.$$

Zur Berechnung des Flächenintegrals versucht man, dieses auf ein Doppelintegral von eindimensionalen Integralen zurückzuführen. Sei $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ ein Rechteck.

Dann gilt

$$\int_\Omega f(x,y)\ d\Omega = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy, \tag{2.1}$$

sofern alle Integrale existieren. Das heißt, die Berechnung des Flächenintegrals über ein Rechteck kann man sich wie folgt vorstellen (mittlere Formel). Für festes $x_0 \in (a,b)$ berechnet man zuerst das Integral bezüglich y in (c,d). Danach „summiert" man für alle $x_0 \in (a,b)$ auf, das heißt, man integriert die Ergebnisse aus dem ersten Schritt in (a,b).

Beispiel 2.1 Man berechne für $\Omega = (2,5) \times (1,3)$

$$\int_\Omega (5x^2y - 2y^3)\ d\Omega.$$

Nach (2.1) gilt

$$\int_\Omega (5x^2y - 2y^3)\ d\Omega = \int_1^3 \int_2^5 \left(5x^2y - 2y^3\right)\ dx\ dy.$$

Man berechnet zunächst das innere Integral

$$\int_2^5 \left(5x^2y - 2y^3\right)\ dx = \frac{5}{3}x^3y - 2xy^3\Big|_2^5 = 195y - 6y^3.$$

Das setzt man zur Berechnung des äußeren Integrals ein

$$\int_1^3 \left(195y - 6y^3\right)\ dy = \frac{195}{2}y^2 - \frac{6}{4}y^4\Big|_1^3 = 660.$$

□

Formel (2.1) lässt sich auf den Fall verallgemeinern, dass Ω oben und unten von zwei stetigen Funktionen $\varphi(x) \le \psi(x)$, $x \in [a,b]$, und seitlich von den beiden Ordinaten $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird, siehe Abbildung 2.2. Die Längen der seitlichen Grenzen kann Null sein. Dann gilt

$$\int_\Omega f(x,y)\ d\Omega = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\ dy \right) dx, \tag{2.2}$$

sofern alle Integrale existieren.

Beispiel 2.2 Sei Ω der Kreis um den Koordinatenursprung mit Radius r. Man berechne

$$\int_\Omega y^2\sqrt{r^2 - x^2}\ d\Omega.$$

Für festes x mit $|x| \le r$ durchläuft y die Werte $-\sqrt{r^2 - x^2}$ bis $\sqrt{r^2 - x^2}$. Deshalb folgt mit (2.2)

$$\begin{aligned}\int_\Omega y^2\sqrt{r^2 - x^2}\ d\Omega &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2\sqrt{r^2 - x^2}\ dy\ dx \\ &= \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2\ dy\ dx.\end{aligned}$$

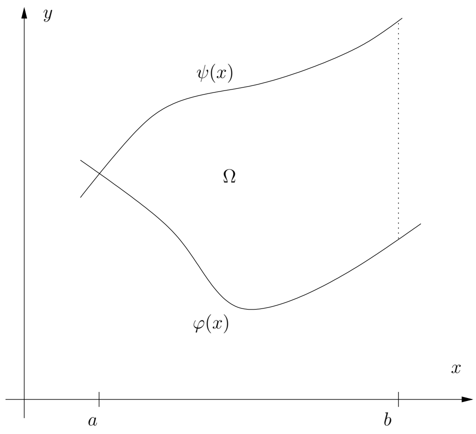

Abbildung 2.2: Durch Kurven begrenzte Fläche.

Für das innere Integral erhält man

$$\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2 \ dy = \frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}.$$

Einsetzen ergibt

$$\int_\Omega y^2 \sqrt{r^2 - x^2} \ d\Omega = \frac{2}{3} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)^2 \ dx = \frac{32}{45} r^5.$$

$\square$

2.2 Der Gaußsche Integralsatz

Der Gaußsche Integralsatz stellt eine Beziehung zwischen einem Flächenintegral und einem Kurvenintegral her. Aus der eindimensionalen Integralrechnung ist bereits die Formel der partiellen Integration bekannt

$$\int_a^b u'v \ dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b uv' \ dx.$$

Im Spezialfall $v \equiv 1$ erhält man den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\int_a^b u' \ dx = u(b) - u(a).$$

Die rechte Seite kann man als ,,Integrale" über die nulldimensionalen Gebiete (Punkte) a und b auffassen. Die Dimension des Integrationsgebiets der ersten beiden Terme auf der rechten Seite ist also um Eins niedriger als auf der linken Seite. Solch eine Beziehung soll jetzt in zwei Dimensionen hergeleitet werden.

Zunächst wird der Divergenz–Operator definiert. Sei $\mathbf{v}$ ein auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ definiertes Vektorfeld, dann ist die Divergenz von $\mathbf{v}$ die Summe der ersten partiellen Ableitungen der i–ten Komponente von $\mathbf{v}$ nach der i–ten Koordinate

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \ldots + \frac{\partial \mathbf{v}_d}{\partial x_d}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Wie auch in den anderen Abschnitten, wird der Gaußsche Integralsatz für einen Spezialfall hergeleitet und dann für den allgemeinen Fall nur angegeben. Als Spezialfall betrachten wir, dass $\Omega = (a,b) \times (c,d)$ ein Rechteck ist. Wir wollen

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{v}(x,y)\ d\Omega = \int_a^b \int_c^d \nabla \cdot \mathbf{v}(x,y)\ dydx$$

berechnen. Man erhält, mit der eindimensionalen Formel der partiellen Integration,

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d \nabla \cdot \mathbf{v}(x,y)\ dydx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial x}(x,y)\ dx \right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial y}(x,y)\ dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\mathbf{v}_1(b,y) - \mathbf{v}_1(a,y) \right)\ dy + \int_a^b \left(\mathbf{v}_2(x,d) - \mathbf{v}_2(x,c) \right)\ dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Wir bezeichnen den Rand von Ω mit $\partial\Omega$ und desweiteren sei $\mathbf{n}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$. Für den konkreten Fall des Rechtecks ist $\mathbf{n} = (0,-1)^T$ für die untere Seite $y = c$, $\mathbf{n} = (1,0)^T$ für die rechte Seite $x = b$, $\mathbf{n} = (0,1)^T$ für die obere Seite $y = d$ und $\mathbf{n} = (-1,0)^T$ für die linke Seite $x = a$. Mit diesen Bezeichnungen kann man die Gleichung (2.3) kurz schreiben

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{v}(x,y)\ d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ ds. \tag{2.4}$$

Die Gleichung (2.4) wird Gaußsche Integralsatz genannt. Er gilt für viel allgemeinere Gebiete als Rechtecke. Wichtig ist, dass das Gebiet in einem gewissen Sinne einen vernünftigen Rand besitzt.

Seien $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, eine skalare Funktion und $\mathbf{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ein Vektorfeld. Dann folgt mit Produktregel

$$\nabla \cdot (u\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial(u\mathbf{v}_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i}\mathbf{v}_i + u\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} = \nabla u \cdot \mathbf{v} + u\nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Mit dieser Beziehung folgt

$$\int_\Omega \nabla \cdot (u\mathbf{v})(x,y)\ d\Omega = \int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{v}\ d\Omega + \int_\Omega u\nabla \cdot \mathbf{v}\ d\Omega$$

und mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\int_\Omega \nabla \cdot (u\mathbf{v})(x,y)\ d\Omega = \int_{\partial\Omega} u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ ds.$$

Durch Einsetzen und Umstellen erhält man

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{v}\ d\Omega = \int_{\partial\Omega} u\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\ ds - \int_\Omega u\nabla \cdot \mathbf{v}\ d\Omega \tag{2.5}$$

womit die Ähnlichkeit zur Formel der partiellen Integration in einer Dimension offensichtlich ist. Die Beziehung (2.5) wird auch Gaußscher Integralsatz oder erste Greensche Formel genannt.

Der Laplace–Operator einer skalaren Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ist die Summe aller nicht gemischten zweiten Ableitungen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \nabla \cdot \nabla u.$$

Die letzte Beziehung rechnet man leicht nach. Nach der ersten Greenschen Formel (2.5) gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\Delta u)v\; d\Omega &= \int_\Omega (\nabla\cdot\nabla u)v\; d\Omega = \int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot \mathbf{n} v ds - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\; d\Omega\\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\; d\Omega.\end{aligned}$$

Auch diese Beziehung wird oft erste Greensche Formel genannt. Der Ausdruck $\nabla u\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ ist die Richtungsableitung in Normalenrichtung, oder kurz die Normalenableitung auf dem Rand. Auf das Flächenintegral der rechten Seite kann man noch einmal die erste Greensche Formel (2.5) anwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\Delta u)v\; d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot \mathbf{n} v ds - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\; d\Omega\\ &= \int_{\partial\Omega} \nabla u\cdot \mathbf{n} v ds - \int_{\partial\Omega} u\nabla v\cdot\mathbf{n} ds + \int_\Omega u(\Delta v)\; d\Omega. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Diese Formel wird zweite Greensche Formel genannt.

2.3 Variablensubstitution in Flächenintegralen

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung eindimensionaler bestimmter Integrale ist die Variablensubstitution

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\; dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\; du,$$

wobei $u = g(x)$ ist. Man kann auch in Flächenintegralen die Variablen substituieren. Damit kann man die Integration beispielsweise auf ein einfacheres Gebiet überführen, oder die natürlichen Koordinaten eines Problems (z.B. Polarkoordinaten) nutzen.

Die Herleitung der Formel für die Variablensubstitution ist recht langwierig und muss aus Zeitgründen entfallen. Seien Ω_1 und Ω_2 zwei Gebiete, die gewisse Eigenschaften bezüglich ihrer Ränder erfüllen und zwischen denen es eine eineindeutige Abbildung gibt

$$D\;:\;\Omega_2\to\Omega_1,\;\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi(\xi,\eta)\\ \psi(\xi,\eta)\end{pmatrix}.$$

Insbesondere dürfen die Gebiete gleich sein. Die Funktionaldeterminante der Abbildung ist

$$J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\end{vmatrix}.$$

Dann lautet die Formel für die Variablensubstitution

$$\int_{\Omega_1} f(x,y)\; dxdy = \int_{\Omega_2} f(\varphi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta))\,|J(\xi,\eta)|\; d\xi d\eta, \qquad (2.7)$$

wobei man beachten muss, dass im Integral der Betrag der Funktionaldeterminante steht.

Beispiel 2.3 Seien $f(x,y) = xy$ und Ω_1 sei der Viertelkreis $x^2+y^2\le R^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$. Bei der Integration über Gebiete, die etwas mit Kreisen zu tun haben, bieten sich

Polarkoordinaten an: $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$. Für die Funktionaldeterminante erhält man

$$J(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -r\sin(\phi) & r\cos(\phi) \end{vmatrix} = r\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi))\right) = r.$$

Der Viertelkreis ist gegeben durch $0 \le r < R$, $0 \le \phi \le \pi/2$. Man erhält also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f(x,y)\ d\Omega &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} r^2 \cos(\phi)\sin(\phi) r\ d\phi dr \\ &= \int_0^R r^3 \frac{-\cos(2\phi)}{4}\Big|_0^{\pi/2}\ dr = \frac{1}{2}\int_0^R r^3\ dr = \frac{R^4}{8}. \end{aligned}$$

$\square$

2.4 Erweiterungen der Integrale auf höhere Dimensionen

Eine natürliche Erweiterung des Flächenintegrals auf ein d–dimensionales Gebiet, $d \ge 3$, ist das Volumenintegral. Dieses braucht man zum Beispiel, um die Volumina von d–dimensionalen Körpern zu berechnen. Man versucht, das d–dimensionale Volumenintegral auf ein d–fach Integral zurückzuführen. Hat man zum Beispiel über einen Quader $\Omega = \times_{i=1}^d (a_i, b_i)$ zu integrieren, so erhält man in Analogie zu (2.1)

$$\int_\Omega f(x_1,\ldots,x_d)\ d\Omega = \int_{a_1}^{b_1} \left(\cdots \left(\int_{a_d}^{b_d} f(x_1,\ldots,x_d)\ dx_d\right)\cdots\right)\ dx_1.$$

Unter entsprechenden Voraussetzungen an die zu integrierende Funktion, kann man die Integrationsreihenfolge beliebig vertauschen (Satz von Fubini). **check**

Eine zweite Erweiterung des Flächenintegralbegriffs besteht in der Integration auf $d-1$–dimensionalen Hyperflächen. Für $d = 3$ spricht man vom Oberflächenintegral und man hat beispielsweise über den Rand eines Quaders oder die Oberfläche einer Kugel zu integrieren. Die allgemeine Behandlung des Oberflächenintegrals ist recht kompliziert und kann aus Zeitgründen nicht geschehen. Die formale Schreibweise ist wie in zwei Dimensionen

$$\int_{\partial\Omega} f\ d\mathbf{s}.$$

Die in zwei Dimensionen behandelten Beziehungen gelten sinngemäß auch in höheren Dimensionen:

- eine mehrfache Integralformel wie (2.2),
- der Gaußsche Integralsatz (2.4),
- die erste Greensche Formel (2.5),
- die zweite Greensche Formel (2.6),
- die Formel der Variablensubstitution (2.7).

Dazu gibt es Übungsaufgaben.