Kapitel 1

Kurvenintegrale

1.1 Kurven

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Weg κ ist eine Abbildung dieses Intervalls in den $\mathbb{R}^d, d \geq 1$,

$$\kappa \;:\; I \to \mathbb{R}^d.$$

Dabei nennt man $\kappa(a)$ den Anfangspunkt, $\kappa(b)$ den Endpunkt und das Bild $\kappa([a, b])$ die Spur des Weges. Der Weg wird von $\kappa(a)$ nach $\kappa(b)$ durchlaufen. Die obige Abbildungsvorschrift nennt man Parametrisierung des Weges.

Beispiel 1.1 Zwei Wege können die gleiche Spur besitzen:

$$\begin{aligned}
\kappa_1 \quad &: \quad I = [-1, 1], \quad \kappa_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1 - t^2} \end{pmatrix}, \quad t \in I, \\
\kappa_2 \quad &: \quad I = [0, \pi], \quad \kappa_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,
\end{aligned}$$

haben als Spur jeweils den Einheitshalbkreis in der oberen Halbebene. □

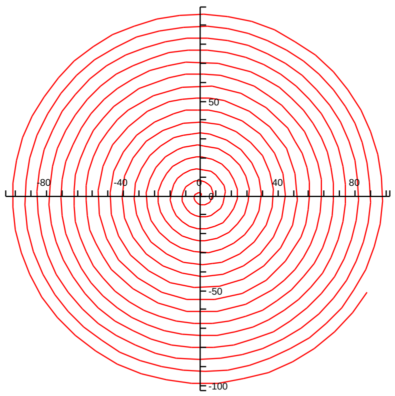
Zwei Wege mit der gleichen Spur sollen als die gleiche Kurve bezeichnet werden, falls der Druchlaufsinn der Spuren sowie die Anzahl der Durchläufe gleich sind. Im Beispiel 1.1 ist der Durchlaufsinn der Spuren unterschiedlich, also handelt es sich nicht um die gleichen Kurven.

Wir werden hier nur Kurven betrachten, bei denen der Tangentenvektor $d\kappa/dt =: \dot{\kappa}(t)$ an keiner Stelle $t \in I$ verschwindet. Man spricht dann von einer regulären Kurve.

Beispiel 1.2 Die Archimedische Spirale ist für $t \geq 0$ durch

$$t \mapsto \kappa(t) = \begin{pmatrix} t \cos t \\ t \sin t \end{pmatrix}$$

gegeben.



Es gilt

$$\dot{\kappa}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\|\dot{\kappa}(t)\|_2 = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)2} = \sqrt{1 + t^2} \neq 0.$$

Damit ist die Archimedische Spirale auf $[0, \infty)$ regulär. *Weitere Beispiel Übungsaufgaben* $\square$

Wird die betrachtete Kurve durch eine Funktion $f \ : \ [a, b] \to \mathbb{R}$ definiert, so kann man als Parametrisierung

$$t \mapsto \kappa(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b] \tag{1.1}$$

verwenden, siehe κ_1 in Beispiel 1.1.

1.2 Skalares Kurvenintegral

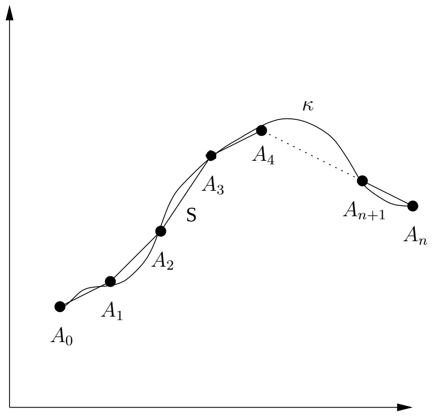
Das skalare Kurvenintegral wurde früher auch Kurvenintegral 1. Art genannt. Es ist eine Verallgemeinerung des Integrals definiert auf einem Intervall der x–Achse auf ein Integral welches auf einer Kurve definiert ist. Es dient vor allem der Berechnung der Länge von Kurven.

Wir betrachten eine Kurve κ im $\mathbb{R}^d$ und endlich viele Teilpunkte

$$\kappa(a) = A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n = \kappa(b)$$

auf dieser Kurve, die vom Anfangs– zum Endpunkt numeriert sind. Zu den Teilpunkten $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \kappa$ gehört das Sehnenpolygon S mit der Länge

$$l(S) = \sum_{i=0}^{n-1} \|A_{i+1} - A_i\|_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i.$$



Um eine Berechnungsvorschrift für die Länge von κ zu erhalten, gehen wir analog wie bei der Herleitung des (Riemann)–Integrals über Intervallen vor. Wir betrachten eine Zerlegung der Kurve durch immer mehr Punkte A_i und zwar so, dass $\max_i \|A_{i+1} - A_i\|_2 \to 0$. Strebt die Länge der Sehnenpolygone einem endlichen Grenzwert zu, der nicht von der Wahl der Punkte A_i abhängig ist, so ist dieser Grenzwert gleich der Länge der Kurve und man schreibt

$$l(\kappa) = \int_\kappa ds,$$

wobei ds als skalares Bogenelement bezeichnet wird. Kurven mit endlicher Länge $l(\kappa) < \infty$ werden rektifizierbar genannt.

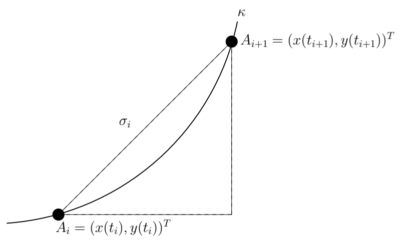


Abbildung 1.1: Sehne σ_i.

Betrachten wir den zweidimensionalen Fall, $\kappa(t) = (x(t), y(t))^T$, dann lässt sich σ_i wie in Abb. 1.1 veranschaulichen. Man hat (Pythagoras)

$$\begin{aligned}
\sigma_i &= \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\right)^2}\,(t_{i+1} - t_i),
\end{aligned}$$

woraus man im Grenzprozess

$$ds = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}dt = \|\dot{\kappa}(t)\|_2\, dt$$

erhält. Diese Beziehung gilt sinngemäß auch in höheren Dimensionen. Man erhält also

$$l(\kappa) = \int_a^b \|\dot{\kappa}(t)\|_2 \, dt. \tag{1.2}$$

Beispiel 1.3 Ein Kreis K mit Radius r und Mittelpunkt (x_0, y_0) ist durch

$$t \mapsto \kappa(t) = \begin{pmatrix} r\cos t + x_0 \\ r\sin t + y_0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

gegeben. Der Umfang des Kreises kann einfach mit (1.2) berechnet werden

$$l(K) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin(t))^2 + (r\cos(t))^2}\ dt = r\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)}\ dt = 2\pi r.$$

Weitere Beispiele Übungsaufgaben □

Im Falle einer skalaren Funktion einer skalaren Veränderlichen, in welchem man die Parametrisierung (1.1) verwenden kann, wird aus der Formel (1.2) für die Kurvenlänge

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\ dt.$$

Die Berechnung der Kurvenlänge ist ein Spezialfall des skalaren Kurvenintegrals. Im allgemeinen skalaren Kurvenintegral ist eine Funktion auf der Kurve gegeben $f\ :\ \kappa([a,b]) \to \mathbb{R}$ und man sucht den Inhalt der Fläche zwischen f und der Kurve. Mit der obigen Vorgehensweise erhält man die Berechnungsvorschrift

$$\int_\kappa f(s)\ ds = \int_a^b f(\kappa(t))\,\|\dot{\kappa}(t)\|_2\ dt.$$

Die Länge von κ erhält man für $f \equiv 1$.

Einfache Eigenschaften des skalaren Kurvenintegrals sind:

- Linearität

$$\int_\kappa (\lambda f(s) + \mu g(s))\ ds = \lambda \int_\kappa f(s)\ ds + \mu \int_\kappa g(s)\ ds, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

- Integralabschätzung

$$\int_\kappa f(s)\ ds \le l(\kappa) \sup_{\mathbf{x}\in\kappa} |f(\mathbf{x})|.$$

- Das skalare Kurvenintegral ist unabhängig vom Durchlaufsinn der Kurve. Bei der Kurvenlänge ist das unmittelbar aus (1.2) einzusehen. Da $a < b$ für jede Parametrisierung ist und der Integrand positiv ist, so ist der Integralwert auch positiv. (*Übungsaufgabe)*

1.3 Vektorielles Kurvenintegral

Eine große Bedeutung in der Praxis besitzt das vektorielle Kurvenintegral. Dieses wurde früher auch Kurvenintegral 2. Art genannt.

Das vektorielle Kurvenintegral ist für Vektorfelder definiert. Unter einem Vektorfeld verstehen wir eine Abbildung $\mathbf{v}\ :\ \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Anschaulich denkt man sich den Vektor $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ im Punkt $\mathbf{x}$ angeheftet. Beispiele von Vektorfeldern sind Geschwindigkeitsfelder, Gravitationsfelder, elektrische oder magnetische Felder.

Sei $\kappa\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine reguläre Kurve. Dann ist das vektorielle Kurvenintegral definiert durch

$$\int_\kappa \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} := \int_\kappa v_1\ dx_1 + \ldots + v_d\ dx_d = \int_a^b \mathbf{v}(\kappa(t)) \cdot \dot{\kappa}(t)\ dt.$$

Das Symbol $d\mathbf{x} = \dot{\kappa}(t)\ dt$ steht dabei für das vektorielle Bogenelement.

Das vektorielle Kurvenintegral kann folgende Bedeutungen in der Physik besitzen:

Vektorfeld	Kurvenintegral
Kraftfeld	Arbeit
Geschwindigkeitsfeld	Zirkulation
elektrische Feldstärke	elektrische Spannung
infinitesimale Wärmeänderung	Wärmemenge

Beispiel 1.4 Ein Massenpunkt im Koordinatenursprung $\mathbf{0}$ erzeugt ein Gravitationsfeld, das bis auf einen konstanten Faktor gegeben ist durch

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^3} = -\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wird ein zweiter Massenpunkt der Masse 1 längs der Kurve $\kappa \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{0}$, $\kappa \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}^3$ bewegt, so ist die an ihm geleistete Arbeit das Wegintegral

$$\int_\kappa \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = -\int_a^b \frac{\kappa(t)}{\|\kappa(t)\|_2^3} \cdot \dot{\kappa}(t)\; dt.$$

Man erhält mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\|\kappa(t)\|_2} = \frac{d}{dt}\frac{1}{\left(\kappa_1^2(t)+\kappa_2^2(t)+\kappa_3^2(t)\right)^{1/2}} = -\frac{\kappa(t)\cdot\dot{\kappa}(t)}{\|\kappa(t)\|_2^3}.$$

Somit ergibt sich für die geleistete Arbeit

$$\int_\kappa \mathbf{G} \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{1}{\|\kappa(t)\|_2}\; dt = \frac{1}{\|\kappa(b)\|_2} - \frac{1}{\|\kappa(a)\|_2}.$$

Man sieht insbesondere, dass in diesem Kraftfeld die Arbeit nicht von der konkreten Kurve abhängt, sondern nur von deren Anfangs– und Endpunkt. Ist die Kurve geschlossen, stimmen also Anfangs– und Endpunkt überein, so wird keine Arbeit geleistet. □

Beispiel 1.5 Fließt durch einen Draht, der in der x_3–Achse liegt, ein konstanter Strom, so erzeugt dieser nach dem Biot-Savartschen Gesetz ein Magnetfeld außerhalb des Drahts, das bis auf einen konstanten Faktor durch

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Integration über eine geschlossene Kurve, etwa einen Kreis in der $x_1 - x_2$–Ebene $\kappa(t) = (r\cos(t), r\sin(t), 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, ergibt

$$\int_\kappa \mathbf{H} \cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin(t) \\ r\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = 2\pi.$$

In diesem Beispiel verschwindet also das vektorielle Kurvenintegral über die geschlossene Kurve nicht. □

Eigenschaften des vektoriellen Kurvenintegrals sind:

- Additivität. Ist $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ mit κ_1, κ_2 regulär, so gilt

$$\int_\kappa \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\kappa_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\kappa_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x},$$

- Linearität

$$\int_\kappa (\lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{x} = \lambda \int_\kappa \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \mu \int_\kappa \mathbf{w} \cdot d\mathbf{x},$$

- Integralabschätzung

$$\left| \int_\kappa \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \right| \le l(\kappa) \sup_{\mathbf{x} \in \kappa} \|\mathbf{v}(\mathbf{x})\|_2 .$$

- Das Vorzeichen des vektoriellen Kurvenintegrals hängt vom Durchlaufsinn der Kurve ab.

Wichtige Felder in der Physik sind diejenigen, für welche der Wert des vektoriellen Kurvenintegrals nur vom Anfangs– und Endpunkt des Weges, aber nicht vom Weg selber abhängt. Vektorfelder $\mathbf{v} \; : \; \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, die diese Eigenschaft besitzen, werden konservativ genannt. Eine einfache Schlussfolgerung besteht darin, dass ein Vektorfeld genau dann konservativ ist, wenn das Kurvenintegral über alle geschlossenen, stückweise regulären Kurven in Ω verschwindet.

Satz 1.6 *Ein Vektorfeld $\mathbf{v} \; : \; \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist genau dann konservativ, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $U \; : \; \Omega \to \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\mathbf{v} = \nabla U = \mathit{grad}\ U,$$

d.h. $\mathbf{v}$ ist ein Gradientenfeld. In diesem Fall ist das Kurvenintegral über eine Kurve κ vom Punkt P_1 nach P_2 gegeben durch

$$\int_\kappa \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = U(P_2) - U(P_1).$$

U heißt Potential von $\mathbf{v}$.

Beweis: Jedes Gradientenfeld ist konservativ. Mit Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dt} U(\kappa(t)) = \nabla U(\kappa(t)) \cdot \dot{\kappa}(t) = \mathbf{v}(\kappa(t)) \cdot \dot{\kappa}(t).$$

Das Kurvenintegral über κ ist dann

$$\begin{aligned} \int_\kappa \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} &= \int_a^b \mathbf{v}(\kappa(t)) \cdot \dot{\kappa}(t)\ dt = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\kappa(t))\ dt = U(\kappa(b)) - U(\kappa(a)) \\ &= U(P_2) - U(P_1). \end{aligned}$$

Für den Beweis der Umkehrung, dass jedes konservative Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, sei auf die Literatur verwiesen. ■

Ein einfaches notwendiges Kriterium um zu entscheiden, ob ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, basiert auf dem Satz von Schwarz. Dieser besagt, dass unter gewissen Bedingungen, für die gemischten Ableitungen einer Funktion $U \; : \; \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, d, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

das heißt, die Reihenfolge der Differentiation ist egal. Ist $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)^T = \nabla U$, dann folgt

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \ldots, d. \qquad (1.3)$$

Ein Vektorfeld, welches Bedingung (1.3) erfüllt, wird rotationsfrei genannt. Im $\mathbb{R}^3$ gibt es den sogenannten Rotationsoperator

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{x_1} & \mathbf{e}_{x_2} & \mathbf{e}_{x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

mit welchem ein rotationsfreies Vektorfeld kurz mit $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ charakterisiert werden kann. Das Symbol $|\cdot|$ ist hier die Determinante.

Die Schwierigkeit bei dieser Charakterisierung steckt im Detail. Der Schluss von Rotationsfreiheit eines Vektorfelds auf ein Gradientenfeld hängt von der Beschaffenheit des Gebiets Ω ab. Ein Gebiet ist eine offene und zusammenhängende Menge. Dieses wird sternförmig genannt, wenn es einen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ gibt, so dass mit jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke zwischen $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}$ in Ω liegt. Anschaulich bedeutet dies, dass man vom Zentrum $\mathbf{x}_0$ aus jeden Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$,,sehen" kann. Ein Gebiet Ω heißt einfach, wenn es eine eine eineindeutige Abbildung von Ω auf ein sternförmiges Gebiet gibt, die hinreichend oft differenzierbar ist. Anschaulich entsteht ein einfaches Gebiet durch ,,Verbiegen" eines sternförmigen Gebiets.

Beispiel 1.7 Ein einfaches Gebiet muss nicht sternförmig sein. So kann man beispielsweise das sternförmige Rechteck $(a, b) \times (c, d)$ eineindeutig auf einen Kreisring mit Schlitz abbilden. **Bild**. □

Für zweidimensionale Gebiete hat man eine andere, einfache Charakterisierung eines einfachen Gebiets: Für jede in Ω liegende einfach geschlossene Kurve muss der von dieser Kurve berandete endliche Bereich ganz zu Ω gehören. Man nennt diese Gebiete auch einfach zusammenhängend. Eine ähnliche Charakterisierung gibt es in drei Dimensionen: In jede einfache geschlossene stückweise reguläre Kurve κ in Ω kann eine stückweise glatte, sich nicht durchdringende Fläche eingespannt werden, die κ als Rand besitzt und ganz in Ω enthalten ist.

Beispiel 1.8 Für das Vektorfeld $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ aus Beispiel 1.5 gilt

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \left(0, 0, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\right)^T = \mathbf{0}.$$

Das Vektorfeld ist also rotationsfrei. Es ist jedoch nicht auf der x_3–Achse $(0, 0, x_3)$ definiert. Man kann zeigen, dass das Definitionsgebiet nicht einfach ist. Die anschauliche Beschreibung mit der eingespannten Fläche kann man nicht erfüllen. Diese kann man aber in Beispiel 1.4 erfüllen, bei welchem die Funktion auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert ist. Nimmt man da bespielsweise einen Kreis in der x_1–x_2–Ebene als geschlossen Kurve, so kann man da eine Halbkugel einspannen und das obige anschauliche Kriterium ist erfüllt.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Rotationsfreiheit nur eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung ist. □

Es gilt:

Satz 1.9 Hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials. *Ein stetig differenzierbares Vektorfeld* $\mathbf{v}$ *sei auf dem einfachen Gebiet* Ω *rotationsfrei. Dann gibt es auf* Ω *ein Potential* U *mit* $\mathbf{v} = \nabla U$.

Für den Beweis dieses Satzes sei auf die Literatur verwiesen.

Die Berechnung des Potentials wird an einem Beispiel veranschaulicht.

Beispiel 1.10 Gegeben sei $\mathbf{v} \; : \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ -x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Der $\mathbb{R}^3$ ist ein sternförmiges Gebiet. Es reicht, die Rotationsfreiheit von $\mathbf{v}$ zu überprüfen. Die Bedingungen dafür sind nach (1.4)

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(= 0), \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(= 1), \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(= -1).$$

Damit existiert ein Potential U. Dieses wird mittels Integration berechnet. Aus der Eigenschaft des Gradientenfeldes folgt

$$U(\mathbf{x}) = \int v_1(\mathbf{x}) \; dx_1 = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_3 + C_1(x_2, x_3).$$

Differenziert man dies nach x_2 und vergleicht mit v_2, so erhält man

$$-x_2 - x_3 = v_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\partial C_1(x_2, x_3)}{\partial x_2}.$$

Inegration ergibt

$$C_1(x_2, x_3) = \int -x_2 - x_3 \; dx_2 = -\frac{x_2^2}{2} - x_2 x_3 + C_2(x_3),$$

also

$$U(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_3 - \frac{x_2^2}{2} - x_2 x_3 + C_2(x_3).$$

Nun differenziert man U nach x_3 und vergleicht mit v_3:

$$x_1 - x_2 = v_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3} = x_1 - x_2 + \frac{\partial C_2(x_3)}{\partial x_3}.$$

Daraus folgt, dass $C_2(x_3)$ eine Konstante C ist und man erhält

$$U(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_3 - x_2 x_3 + C.$$

Durch Differentiation rechnet man schnell nach, dass U das gesuchte Potential ist.
□