Dr. B.Rummler
Dr. V.John
Institut für Analysis und Numerik

Magdeburg,den 14.07.99

Testat: Lineare Funktionalanalysis

Name:

	Punkte	erreichte Punkte
Testat	27	
Übung	9	
Summe	36	

1. Gegeben seien die linearen und stetigen Operatoren $A, B \in \mathcal{L}(H, H)$. A sei vollstetig.
Man zeige: AB und BA sind vollstetig. **3 Punkte**

2. Bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ und sei d die durch sie induzierte Metrik (Euklidische Metrik). Man betrachte die Funktion $e : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
$$e(p,q) = \begin{cases} \|p\| + \|q\| & \text{falls } \|p\| \neq \|q\| \\ d(p,q) & \text{falls } \|p\| = \|q\| \end{cases}, p, q \in \mathbb{R}^2.$$
Man zeige, daß e eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. **6 Punkte**

3. Man zeige: Besitzt eine Folge $\{x_k\}$ von Elementen einer kompakten Teilmenge des metrischen Raumes (M, d) nur einen Häufungspunkt a, so konvergiert sie gegen a. **4 Punkte**

4. Sei $A : H \mapsto H$ ein linearer Operator und H ein Hilbert–Raum. Man definiere die Begriffe Eigenwert, Resolvente, regulärer Punkt und Spektrum.

   Man betrachte den Operator
$$\begin{aligned} A : l^2 &\mapsto l^2 \\ (x_1, x_2, \ldots) &\to (0, x_1, x_2, \ldots). \end{aligned}$$
   Man berechne die Eigenwerte von A. Gehört $\lambda = 0$ zum Spektrum von A ? Man begründe die Antwort ! **6 Punkte**

5. In einem Hilbert–Raum H konvergiere die Folge $\{x_n\}$ schwach gegen x. Dabei gelte $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$ für $n \to \infty$. Es ist zu beweisen, daß die Folge $\{x_n\}$ dann auch stark gegen x konvergiert, d.h. $\|x - x_n\|_H \to 0$. **5 Punkte**

6. Was versteht man unter einer Spektralschar ? Man definiere einen Spektraloperator ! **3 Punkte**

Testatschein erreicht bei mindestens 18 erzielten Punkten!